Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 9 февраля 2019 года. Решения задач.

1. Петя работал 2 часа в день и получал по 5 рублей в час за каждый полный год своего возраста. В течение полугода Петя работал 50 дней и заработал 9300 рублей. а) Сколько полных лет ему было после того, как прошли эти полгода? б) Сколько дней он проработал в этом возрасте?

Ответ. а) 19 полных лет; б) 30 дней.

Решение. Заметим, что Петя получает 10 рублей в день за каждый полный год своего возраста. Кроме того, $180 \cdot 50 = 9000 < 9300 < 9500 = 190 \cdot 50$. Следовательно, он проработал некоторое количество дней в возрасте 18 лет, а остальные — в возрасте 19 лет. Значит, ответ на первый вопрос — 19 полных лет. Обозначим количество дней, которые он работал в возрасте 19 лет за x. Тогда в возрасте 18 лет он работал $(50 - x)$ дней, откуда получаем уравнение $190x + 180(50 - x) = 9300$. Преобразовав его, найдем $10x = 300$, откуда $x = 30$.

2. Вася выписывает в ряд дроби $\frac{1}{2018}, \frac{2}{2017}, \frac{3}{2016}, \ldots, \frac{2017}{2}, \frac{2018}{1}$ и сокращает их, если это возможно. Некоторые из записанных им дробей оказываются целыми, например, $\frac{2018}{1} = 2018$. А сколько всего целых чисел встретится в его ряду?

Ответ. 3.

Решение. Сумма числителя и знаменателя каждой дроби равна 2019, то есть, каждая дробь имеет вид $\frac{2019-x}{x}$, где x — натуральное число, не превосходящее 2018. Уравнение $\frac{2019-x}{x} = k$ равносильно уравнению $2019 = (k + 1)x$, откуда следует, что число x должно быть делителем 2019. Поскольку $2019 = 3 \cdot 673$, где числа 3 и 673 — простые, x может равняться 1, 3 или 673.

3. Имеется квадрат 6×6, все клетки которого белые. За один ход разрешается изменить цвет обеих клеток в любой доминошке (прямоугольнике из двух клеток) на противоположный. За какое наименьшее число ходов можно получить квадрат с шахматной раскраской? *Не забудьте объяснить, почему меньшего количества ходов не хватит!*

Ответ. 18 ходов.

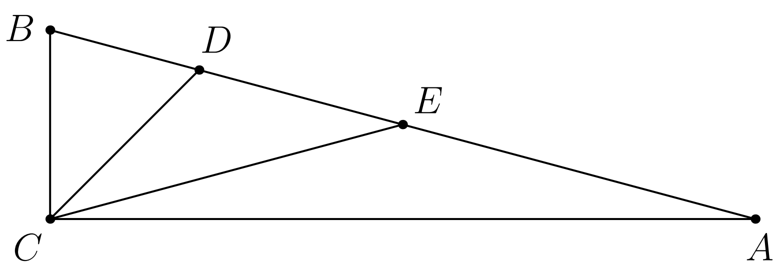
Решение. Заметим, что в шахматной раскраске квадрата 6×6 присутствует 18 черных клеток. При этом никакие две из них не могут стать черными за один ход, потому что не покрываются одной доминошкой. Следовательно, потребуется минимум 18 ходов (хотя бы одному на клетку). Сделать это за 18 ходов можно, например, так: разбить доску на 9 квадратов 2×2, а в каждом квадрате перекрасить сначала нижнюю доминошку, а затем — правую. Есть и другие алгоритмы.

4. Петя написал олимпиаду, в которой было 6 задач, и за каждую получил от 0 до 7 баллов. Он не говорит свои баллы, а его учитель хочет их угадать. Для этого учитель пишет последовательность из шести оценок (каждая от 0 до 7), а Петя отвечает, правда ли, что каждый из его баллов не меньше соответствующего написанного. Сможет ли учитель за 18 вопросов отгадать баллы Пети?

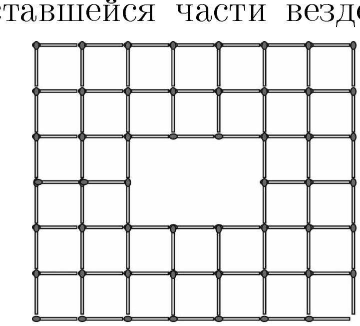
Решение. Сможет. Покажем, как за три вопроса угадать балл за первую задачу. Сначала учитель спросит про набор оценок (4, 0, 0, 0, 0, 0). Если Петя ответит положительно, он получил за первую задачу от 4 до 7, если отрицательно — от 0 до 3. Таким образом, количество вариантов баллов уменьшилось вдвое (с 8 до 4). Ещё двумя делениями пополам учитель сможет узнать оценку за первую задачу (вторым вопросом спросив про 6 в первом случае и про 2 во втором, и далее аналогично). После этого за три вопроса он сможет узнать вторую оценку (спросив про набор (0, 4, 0, 0, 0, 0)), и так далее.

5. В треугольнике ABC, в котором угол C равен $90°$, а угол A равен $15°$, проведена биссектриса CD. Докажите, что $AD - BD = 2 \cdot CD$.

Решение: Перепишем равенство, которое нужно доказать, в виде $AD = BD + 2 \cdot CD$. Прибавим к обеим частям BD. Поскольку $AD + BD = AB$, необходимо доказать, что $AB = 2(BD + CD)$. Проведем медиану AE, тогда $AB = 2BE$ и остается доказать, что $BD + CD = BE = BD + DE$. Докажем, что $CD = DE$. Поскольку медиана в прямоугольном треугольнике, проведенная из вершины прямого угла, равна половине гипотенузы, $CE = AE$. Тогда $\angle ACE = 15°$. Отсюда следует, что $\angle DEC = \angle ACE + \angle CAE = 15° + 15° = 30°$ как внешний в $\triangle ACE$. Кроме того, $\angle DCA = 45°$, так как CD — биссектриса. Следовательно, $\angle DCE = \angle DCA - \angle ACE = 45° - 15° = 30°$. Таким образом, $\angle DCE = \angle DEC$, поэтому $CD = DE$.



6. Назовем *рамкой* клетчатый прямоугольник, из центра которого вырезан меньший клетчатый прямоугольник так, что толщина оставшейся части везде одинакова. Вася хочет выложить какую-то рамку из спичек (одна спичка покрывает одну сторону одной клетки). Например, на рисунке изображена рамка толщины 2 с наружными размерами 6×7, и внутренними 2×3, для выкладывания которой потребуется 90 спичек. Сможет ли Вася выложить какую-нибудь рамку, использовав ровно 2018 спичек?



Решение: Не сможет. Пусть внутренние размеры рамки — $a \times b$, а толщина рамки — k клеток. Тогда наружная граница имеет размеры $(a+2k) \times (b+2k)$. Посчитаем, сколько спичек потребуется, чтобы выложить полностью заполненный прямоугольник размерами $c \times d$. Нужно выложить $c+1$ горизонтальный ряд из d спичек и $d+1$ вертикальный ряд из c спичек. Таким образом, необходимо $(c+1)d+(d+1)c = 2cd+c+d$ спичек.

Чтобы получить рамку, нужно из прямоугольника $(a+2k) \times (b+2k)$ вырезать прямоугольник $a \times b$, но потом надо добавить обратно его границу, то есть, $2a+2b$ спичек. Имеем $2(a+2k)(b+2k)+a+2k+b+2k-(2ab+a+b)+2a+2b = 4ak+4bk+8k^2+2a+2b+4k = 2k(2a+2b+4k)+(2a+2b+4k) = (2k+1)(2a+2b+4k)$. Если такое произведение равно 2018, то $(2k+1)(a+b+2k) = 1009$, но 1009 — простое число, а оба множителя в левой части больше 1, так как $k, a, b \geqslant 1$.