Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 9 февраля 2019 года. Решения задач.

1. Расставьте в квадрате 4×4 числа от 1 до 16 (каждое — по одному разу) так, чтобы сумма чисел во всех строках была четной, а сумма чисел во всех столбцах — нечетной. *Достаточно привести только один пример.*

1	3	5	7
2	4	9	11
6	8	13	15
10	12	14	16

Решение. Пример расстановки приведен на рисунке.

2. Вася выписывает в ряд дроби $\frac{1}{2018}, \frac{2}{2017}, \frac{3}{2016}, \ldots, \frac{2017}{2}, \frac{2018}{1}$ и сокращает их, если это возможно. Некоторые из записанных им дробей оказываются целыми, например, $\frac{2016}{3} = 672$. А какое целое число встретится в его ряду первым?

Ответ. 2.

Решение. Сумма числителя и знаменателя каждой дроби равна 2019. При этом дроби расположены по возрастанию, так как числитель каждый раз увеличивается, а знаменатель — уменьшается. Заметим, что первое число больше нуля и меньше единицы. Поэтому первое целое число, которое могло бы встретиться Васе — это 1. Но уравнение $\frac{x}{2019-x} = 1$ не имеет решения в целых числах, так как равносильно уравнению $2x = 2019$. Следующее целое число – это 2. Уравнение $\frac{x}{2019-x} = 2$ равносильно уравнению $x = 4038 - 2x$ или $3x = 4038$, откуда $x = 1346$. Следовательно, первое целое число в Васином ряду — это 2, оно будет стоять на 1346-м месте.

3. Три мальчика устроили тараканьи бега. Мишин таракан за первую минуту пробежал половину дистанции (это необязательно целое число сантиметров!), а за вторую — 10 см. Таракан Глеба за первую минуту пробежал 1/6 часть дистанции, а за вторую — 100 см. Таракан Андрея за первую минуту пробежал 1/4 часть дистанции, а за вторую — 78 см. По истечении двух минут лидирует таракан Андрея, за ним таракан Миши, а таракан Глеба идет на последнем месте. Найдите длину дистанции, если известно, что она выражается целым числом сантиметров.

Ответ. 271 см.

Решение. Пусть длина дистанции составляет x см. Тогда таракан Миша пробежал $\left(\frac{x}{2} + 10\right)$ см, таракан Глеба — $\left(\frac{x}{6} + 100\right)$ см, а таракан Андрея — $\left(\frac{x}{4} + 78\right)$ см. Из условия следует, что $\frac{x}{6} + 100 < \frac{x}{2} + 10 < \frac{x}{4} + 78$. Первое неравенство равносильно тому, что $90 < \frac{x}{3}$ или $x > 270$. Второе неравенство равносильно тому, что $\frac{x}{4} < 68$ или $x < 272$. Единственное целое число, между 270 и 272 — это число 271.

4. Тимур составил из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, использовав каждую по одному разу, пять двузначных чисел так, чтобы среди них оказалось максимально возможное количество простых чисел. Чему может равняться сумма всех пяти чисел Тимура? *Укажите все ответы и объясните, почему других нет.*

Ответ. 270.

Решение. Все 5 двузначных чисел простыми быть не могут, так как цифра 0 в любом случае будет стоять на месте единиц, и соответствующее число будет делиться на 10. Следовательно, максимальное количество простых чисел — это 4, в этом случае все оставшиеся четные цифры 2, 4, 6, 8, а также цифра 5 должны стоять на местах десятков, иначе соответствующее число либо будет четным, либо будет делиться на 5, то есть окажется составным. Оставшиеся нечетные цифры 1, 3, 7, 9 должны стоять на местах единиц. Тогда сумма всех чисел равна: $20 + 40 + 60 + 80 + 50 + 1 + 3 + 7 + 9 = 270$. Пример таких чисел: 80, 23, 47, 61, 59.

5. Квадрат 7×7 разрезан по линиям сетки на 8 прямоугольников (среди них могут быть одинаковые) так, что длины сторон каждого прямоугольника больше 1. Могло ли оказаться так, что среди этих прямоугольников нет ни одного квадрата?

Решение: Не могло. Минимальный по площади возможный прямоугольник — это 2×3, его площадь равна 6. Поскольку $6\times8 = 48$, единственная возможность разрезать квадрат на 8 прямоугольников, площади которых не меньше 6 — это сделать семь прямоугольников площади 6 и один прямоугольник площади 7. Но единственный прямоугольник площади 7 имеет вид 1×7. Следовательно, среди прямоугольников обязан оказаться хотя бы один квадрат 2×2.

Примечание. В задаче не требовалось приводить пример разрезания, но, вообще говоря, разрезаний, в которых присутствуют квадраты 2×2, 3×3, существует много.

6. На доску выписали подряд все числа от 1 до $2n$. Оказалось, что выписанные числа можно разбить на пары так, чтобы в каждой паре разность равнялась 3 или 4. Чему может быть равно n?

Ответ. Любое число, кроме 1, 2 и 5.

Решение: Очевидно, что блоки из $2 \cdot 3 = 6$ и $2 \cdot 4 = 8$ подряд идущих чисел можно разбить на требуемые пары. Поэтому, если n можно представить в виде суммы троек и четверок, то ряд из $2n$ чисел можно разбить на блоки из 6 или 8 чисел, где числа каждого из блоков можно разбить на пары. Случаи $n = 3$ и $n = 4$ сразу подходят.

Покажем, почему все $n \geqslant 6$ также подходит. Действительно, если n делится на 3, то его можно представить как сумму нескольких троек. Если n дает остаток 1 при делении на 3, то его можно представить как сумму одной 4 и нескольких 3. Если n дает остаток 2 при делении на 3, то его можно представить как сумму двух 4 и нескольких 3.

Осталось показать, что остальные значения n не подходят. При $n = 1$ или $n = 2$ числу 2 нельзя подобрать пару. При $n = 5$ имеется 10 чисел. Первые три и последние три из них не могут образовывать пару друг с другом. Поэтому все они должны образовывать пары с 4 центральными числами. Противоречие.