Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
5 класс, финальный тур. 9 февраля 2019 года. Решения задач.

1. Расставьте числа от 1 до 9, каждое — по одному разу, в клетки квадрата 3×3 так, чтобы у каждой клетки количество соседних клеток с нечетным числом было больше или равно количеству соседних клеток с четным числом. Соседними считаются клетки, имеющие общую сторону.

Решение. Пример расстановки приведен на первом рисунке. Вообще, любой пример имеет вид таблицы на втором рисунке, возможно, повернутой или симметрично отраженной.

1	2	4
3	5	7
6	8	9

ч	ч	н
н	н	н
н	ч	ч

2. Федор и Нияз решали задачи. Всего у них было 20 задач, пронумерованных числами от 1 до 20. Федор пропустил первые три задачи (потому что они по геометрии) и решил следующие 14 задач подряд. Нияз решал задачи с конца. Он пропустил последние две задачи (потому что они не по геометрии) и решил предыдущие 13 задач подряд. Сколько задач было решено только кем-то одним из них?

Ответ. 3 задачи.

Решение. Нияз добрался до 6-й задачи, поэтому задачи 4 и 5 были решены только Федором. Федор добрался до 17-й задачи, поэтому задача 18 была решена только Ниязом. Так же понятно, что первые три и последние две задачи никто не решил, а задачи с 6 по 17 были решены обоими.

3. В ряд лежит несколько шариков. Первый весит один грамм, а каждый следующий на один грамм больше. Оказалось, что их можно покрасить как в 3, так и в 4 или в 5 цветов таким образом, чтобы общий вес шариков каждого цвета был один и тот же. Сколько шариков могло быть?

Решение. Покажем, что 120 шариков подойдут. Разобьем все шарики на пары: первый с последним, второй с предпоследним, и т.д. Получится 60 пар шариков, вес в каждой из которой составляет 121 г. Тогда для каждого количества цветов (3, 4 или 5) достаточно будет покрасить в каждый цвет по $\frac{60}{3}$, $\frac{60}{4}$ и $\frac{60}{5}$ шариков соответственно.

Примечание. Из решения следует также, что подходят все числа, кратные 120. Но у задачи есть и другие ответы. Например, подходит число 15. Действительно, $1 + 2 + \ldots + 15 = 120$ и это число делится на 3, 4 и 5. Разбить его на одноцветные группы можно, например, так: $40 = 15+14+11 = 13+12+10+5 = 9+8+7+6+4+3+2+1$, $30 = 15+14+1 = 13+12+5 = 11+10+9 = 8+7+6+4+3+2$, $24 = 15+9 = 14+10 = 13+11 = 12+8+4 = 7+6+5+3+2+1$.

4. В пяти пакетах лежат конфеты. В первом — 12, во втором — 19, в третьем — 39, в четвёртом — 83 и в пятом — 102. Из любого пакета в любой другой можно переложить любое возможное число конфет. За какое наименьшее количество перекладываний можно уравнять количество конфет в пакетах?

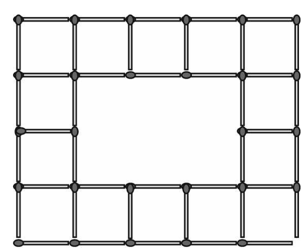
Ответ. 3 перекладывания.

Решение. Общее количество конфет $12 + 19 + 39 + 83 + 102 = 255$, поэтому после перекладываний в каждом пакете должно получиться по $255 : 5 = 51$ конфете. Поскольку в каждом из первых трех пакетах конфет меньше, чем 51 конфета, то потребуется не менее трех перекладываний, чтобы сделать там по 51 конфете. За три перекладывания это сделать можно. Например, переложить из четвертого пакета во второй 32 конфеты. Из пятого переложить в первый 39, а в третий — 12 конфет.

5. На встрече с директором школы за круглым столом расселись школьники — призеры четырех республиканских олимпиад: по математике, информатике, физике и лирике. Известно, что каждый школьник был призером только одной олимпиады и никакие два призера одной олимпиады не сели рядом. Так же физики не сидят рядом с лириками, а математики с информатиками. Могло ли оказаться, что математиков было на одного больше, чем информатиков, а физиков — на два больше, чем лириков?

Решение: Не могло. Покрасим места математиков и информатиков в белый цвет, а места физиков и лириков — в черный. Тогда условие задачи означает, что цвета мест чередуются. Тогда белых и черных мест должно быть поровну. Если математиков на одного больше, чем информатиков, то белых мест будет нечетное количество. Если физиков на два больше, чем лириков, то черных мест будет четное количество. Последние два условия не могут выполняться одновременно.

6. Назовем *контуром* прямоугольника фигуру, составленную из всех клеток, которые прилегают к его границе. Вася хочет выложить какой-то контур из спичек. Например, на рисунке изображен контур прямоугольника 4×5, для выкладывания которого потребуется 42 спички. Сможет ли Вася выложить какой-нибудь контур, использовав ровно 1000 спичек?



Решение: Не сможет. Покажем, что количество спичек в контуре всегда делится на 3. Отсюда будет следовать, что контура из 1000 спичек не существует. Действительно, начнем выкладывать клетки контура по часовой стрелке, начиная с угловой правой нижней клетки. При этом в ее контуре пока не положим верхнюю спичку:  Для каждой следующей клетки теперь потребуется ровно три новые спички, потому что одна из ее сторон уже будет выложена. Для последней клетки тоже потребуется три спички, потому что верхнюю спичку первой клетки мы не положили. Следовательно, общее количество спичек равно количеству клеток, умноженному на 3.