Заочная вступительная работа. 7 класс

Вторая (первая заочная) волна поступления. 15 марта – 15 апреля 2019 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **15-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XII Ваш класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. По кругу сидят 25 детей, у них в сумме 65 гаджетов. У каждого мальчика ровно на 1 гаджет больше, чем у его соседа или соседки справа. Какое наибольшее количество мальчиков может сидеть в этом круге?

2. По кругу лежат 100 мешков. В первом мешке лежат 777 камней, остальные мешки пустые. Пупсень и Вупсень ходят по очереди, начинает Пупсень. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

3. Шахматная доска 8×8 разрезана на 10 клетчатых прямоугольников. Докажите, что среди них найдутся два прямоугольника одинакового периметра.

4. На медиане BM прямоугольного треугольника ABC с прямым углом B выбрана точка K так, что $AB = AK$. Прямая AK пересекает катет BC в точке L. Оказалось, что KL равно LC. Чему может быть равен $\angle CKM$?

5. 14 школьников пришли на дискотеку. Среди них была Настя. В какой-то момент она решила пойти порешать задачи и попрощалась с 10 своими друзьями. После этого она вспомнила, что попрощалась не со всеми, поэтому решила вернуться, и снова попрощалась с 10 друзьями. Так продолжалось несколько раз, пока Настя не попрощалась с каждым из друзей хотя бы по одному разу. На следующий день Настя поняла, что попрощалась с каждым из 13 друзей разное количество раз. Какое наименьшее число раз Настя могла возвращаться на дискотеку?

6. Записали 5-значное число без нулей в записи и все числа, получающиеся перестановками его цифр. У каждого из них нашли остаток при делении на 11. Докажите, что есть остаток, который не встречается среди полученных ни разу.

7. Квадрат 9×9 разрезан на квадраты 2×2 и «уголки» из трех клеток. Какое наибольшее количество квадратов 2×2 могло при этом получиться?

8. Точки M и N лежат на стороне AB, точка P — на стороне BC и точка Q — на стороне CA равностороннего треугольника ABC. Найдите угол между прямыми MP и NQ, если известно, что $MA + AQ = NB + BP = AB$.

Заочная вступительная работа. 8 класс

Вторая (первая заочная) волна поступления. 15 марта – 15 апреля 2019 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **15-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XII Ваш класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. В прямоугольнике $ABCD$ из вершины A опустили перпендикуляры AH и AK на биссектрисы углов ACD и ACB соответственно, а из вершины C — перпендикуляры CP и CQ на биссектрисы углов CAB и CAD соответственно. Докажите, что $HKPQ$ — квадрат.

2. Докажите, что всякое натуральное число, не меньшее миллиона, можно представить как сумму трех составных чисел так, чтобы сумма любой пары слагаемых также была составным числом.

3. По кругу лежат 100 мешков. В первом мешке лежат 777 камней, остальные мешки пустые. Пупсень и Вупсень ходят по очереди, начинает Пупсень. За ход можно переложить один или несколько камней (но не все) из коробки в соседнюю пустую. Кто не может сделать ход — проиграл. Кто из игроков может выиграть, как бы ни играл соперник?

4. В ряд выписаны 100 букв “а”, 100 букв “б” и 100 букв “в”, причем никакие три одинаковые буквы не стоят подряд. Докажите, что можно выбрать 4 стоящие подряд буквы, среди которых есть и “а”, и “б”, и “в”.

5. Сколько существует положительных десятичных дробей (как конечных, так и бесконечных), которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза?

6. Пусть M — середина боковой стороны AB трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$), O — точка пересечения диагоналей, причем $AO = BO$. На продолжении OM за точку M взяли точку P такую, что $\angle PAC = 90^\circ$. Докажите, что $\angle AMD = \angle APC$.

7. Дана последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_{1000000}$ целых неотрицательных чисел. Известно, что сумма любых 100 подряд идущих чисел равна 2019. Натуральное число $k \leqslant 1000000$ назовем *отличным*, если $a_k = k$. Каково наибольшее возможное количество отличных чисел?

8. Шахматная доска 8×8 разрезана на 10 клетчатых прямоугольников. Докажите, что среди них найдутся два прямоугольника одинакового периметра.

Заочная вступительная работа. 9 класс

Вторая (первая заочная) волна поступления. 15 марта – 15 апреля 2019 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **15-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XII Ваш класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Рассмотрим все графики функций вида $y = ax + b$, где a — двузначное, b — трехзначное натуральные числа. Определите наибольшее количество этих графиков, пересекающихся в одной точке, не лежащей на осях координат.

2. Дан треугольник ABC. На серединных перпендикулярах к сторонам AB и BC отмечены точки E и F соответственно так, что $AEFC$ — параллелограмм. Докажите, что отрезок AE равен радиусу описанной окружности.

3. *Ладья-прожектор* бьет все клетки своей вертикали и горизонтали, в том числе через другие фигуры. Какое наибольшее количество ладей-прожекторов, каждая из которых бьет ровно 4 другие ладьи, может стоять на доске 99×99?

4. В выпуклом $3n$-угольнике проведены несколько диагоналей так, что никакие две не пересекаются внутри многоугольника. Докажите, что можно выбрать хотя бы n вершин, которые попарно не соединены между собой ни сторонами, ни проведенными диагоналями.

5. Сколько существует положительных десятичных дробей (как конечных, так и бесконечных), которые при вычеркивании первой цифры после запятой увеличиваются ровно в 3 раза?

6. Целые числа a и b таковы, что $a^3 + b^3 + ab$ делится на $ab(a + b)$. Найдите все возможные пары a и b.

7. В остроугольного треугольника ABC проведена биссектриса AD. Точка M на луче AB выбрана так, что $\angle MDA = \angle ABC$, а точка N на луче AC — так, что $\angle NDA = \angle ACB$. Обозначим через P точку пересечения прямых MN и AD. Докажите, что $AD^3 = AP \cdot AB \cdot AC$.

8. В шеренгу выстроились 20 детей. Сколькими способами их можно разбить на группы стоящих подряд так, чтобы количество детей в каждой группе было нечетным?

Заочная вступительная работа. 10 класс

Вторая (первая заочная) волна поступления. 15 марта – 15 апреля 2019 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **15-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XII Ваш класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. В стране 100 городов и 200 дорог. Докажите, что в ней есть два циклических маршрута одинаковой длины, не проходящих ни по каким городам дважды.

2. На каркасе куба со стороной 1 сидят 9 муравьев, при этом расстояние между любыми двумя муравьями, измеряемое кратчайшим путем по ребрам куба, не меньше k. При каком наибольшем k такое возможно?

3. Пусть $x_0 > x_1 > x_2 > \ldots > x_n$ — положительные действительные числа. Докажите неравенство

$$x_0 + \frac{x_0}{(x_0-x_1)^2} + \frac{x_1}{(x_1-x_2)^2} + \ldots + \frac{x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_n)^2} \geqslant \frac{x_1}{(x_1-x_0)^2} + \ldots + \frac{x_n}{(x_n-x_{n-1})^2} + x_n + 2n.$$

4. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны AC. На стороне AB и касательной к его описанной окружности в точке A выбраны точки P и Q таким образом, что $AP = AQ = AC$. Докажите, что прямая PQ проходит через точку, равноудаленную от прямых AB, BC и CA.

5. Докажите, что для любого натурального числа n можно подобрать такие попарно различные натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что $a_n! = a_{n-1}!a_{n-2}!\ldots a_1!$.

6. Натуральные числа a, b и n удовлетворяют равенству $2^n - 1 = ab$. Пусть 2^d — наибольшая степень двойки, которая делит число $(a+1)(b-1)$. Докажите, что d четно.

7. Дан треугольник ABC. Точки A_1, B_1, C_1 на отрезках BC, CA и AB соответственно — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC, а A_2, B_2, C_2 — точки, в которых тех же сторон (в том же порядке) касаются вневписанные окружности. Докажите, что

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + 2\max(AB, BC, CA) \geqslant AA_2 + BB_2 + CC_2 + 2\min(AB, BC, CA).$$

8. В шеренгу выстроились 20 детей. Сколькими способами их можно разбить на группы стоящих подряд так, чтобы количество детей в каждой группе было нечетным?