

8 класс

Задача 1. Красная Шапочка решила сходить к бабушке, домик которой находился в 1 км ходьбы от ее дома. Волк ей в тот день не попался, поэтому туда и обратно она шла по одному и тому же маршруту. На горизонтальных участках ее скорость была 4 км/ч, в гору – 3 км/ч, а с горы – 6 км/ч. Сколько времени она была в пути?

Ответ. Полчаса.

Решение. Рассмотрим какой-нибудь наклонный участок пути длиной s . Проходя его в гору, Красная Шапочка потратит время $s/3$, под гору – $s/6$, всего -- $s\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right) = \frac{s}{2}$. Значит, ее средняя скорость на этом участке составляет $2s : \frac{s}{2} = 4$. Итак, средняя скорость на всех участках одинакова и равна 4 км/ч. Весь путь девочки составляет 2 км, так что она потратит на дорогу полчаса.

Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 1 балл. За полное обоснование 7 баллов.

Задача 2. Петя утверждает, что два спинера дороже пяти мороженных, Вася -- что три спинера дороже восьми мороженных. Известно, что прав из них только один. Верно ли, что 7 спинеров дороже 19 мороженных?

Ответ. Неверно.

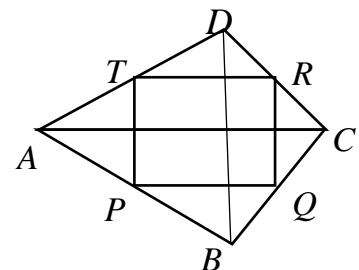
Решение. Обозначим цену спинера через s , а мороженого – через m . Первое утверждение означает, что $s > \frac{5m}{2} = \frac{15m}{6}$, второе – что $s > \frac{8m}{3} = \frac{16m}{6}$. Если бы выполнялось второе условие, то выполнялось бы и первое, что противоречит условию. Значит, $s \leq \frac{8m}{3}$. Но тогда $7s \leq \frac{56m}{3} < 19m$.

Критерии. За ответ без обоснования – 0 баллов, за решение на отдельных примерах – 0 баллов. За полное обоснование 7 баллов.

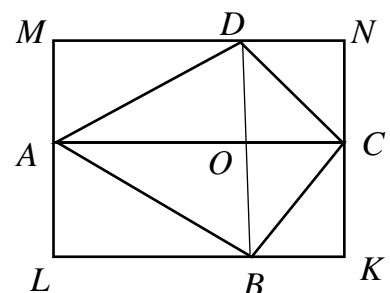
Задача 3. В выпуклом четырёхугольнике длины диагоналей 2 и 4 см. Найти площадь четырёхугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

Ответ. 4 см².

Решение. Отрезок, соединяющий середины смежных сторон четырёхугольника параллелен его диагонали (как средняя линия соответствующего треугольника). Поэтому четырёхугольник $PQRT$ – параллелограмм. По условию диагонали этого параллелограмма равны, так что он является прямоугольником. Но тогда и диагонали AC и BD , параллельные его сторонам, перпендикулярны между собой.



Проведем через вершины прямоугольника прямые, параллельные диагоналям. Получим описанный прямоугольник $KLMN$. Заметим, что треугольник AMD равен ADO , CDN – треугольнику CDO и т.д. Поэтому площадь $KLMN$ вдвое больше, чем площадь $ABCD$. Итак, искомая площадь составляет $S = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4 = 4$.



Замечание. Возможны и другие способы вычисления S , например, как удвоенной площади $PQRT$. Также можно использовать формулу $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD \cdot \sin \alpha$, где α – угол между диагоналями.

Критерии. За разбор частного случая – 0 баллов. Доказательство того, что $SPQR$ – прямоугольник – 3 балла.

|| **Задача 4.** Три прямые, пересекаясь, образуют 12 углов, причем n из них оказались равными. Каково может быть максимальное значение n ?

Ответ. 6.

Решение. Три прямые ограничивают некий треугольник. Если этот треугольник равносторонний, то из двенадцати углов шесть составляют 60° , а остальные шесть -- 120° .

Может ли какой-нибудь внешний угол треугольника быть равным его внутреннему углу? Он равен сумме несмежных с ним внутренних, так что он больше каждого из несмежных. Значит, равным он может быть только смежному с ним. Тогда каждый из них составляет 90° , таких углов 4 (у них общая вершина). Других прямых углов в этой конструкции нет. Но тогда другие внешние углы не равны внутренним. Равными могут быть только внутренние (и вертикальные к ним) или только внешние (и вертикальные к ним). Тогда равных углов каждого типа будет не более 4.

Критерии. За пример с шестью равными углами – 3 балла, за сравнение внешних и внутренних углов – 3 балла. За ответ без обоснования – 1 балл.

|| **Задача 5.** Рассмотрим четыре последовательных числа $n, n + 1, n + 2, n + 3$. Для каких n НОК первых трех чисел больше, чем НОК последних трех?

Ответ. Любое нечетное число не меньше 5.

Решение. Рассмотрим тройку чисел $n, n + 1, n + 2$. Каждые два соседних числа взаимно просты. Если числа n и $n + 2$ имеют общий делитель, то он является делителем их разности, 2. Итак, если число n нечетное, то все три числа $n, n + 1, n + 2$ попарно взаимно просты, так что $\text{НОК}(n, n + 1, n + 2) = n(n + 1)(n + 2)$. Если n четное, то $\text{НОК}(n, n + 1, n + 2) = n(n + 1)(n + 2)/2$. Ясно, $\text{НОК}(n + 1, n + 2, n + 3)$ может быть меньше $\text{НОК}(n, n + 1, n + 2)$, только если n – нечетное. Неравенство принимает вид

$$n(n + 1)(n + 2) > \frac{(n + 1)(n + 2)(n + 3)}{2}$$

или после сокращения $2n > n + 3$. Окончательно $n > 3$, откуда в силу нечетности $n \geq 5$.

Критерии. За вычисление НОК для случая нечетных n – 2 балла, для случая четных -- 3 балла. За полное решение – 7 баллов. За отдельные примеры – 0 баллов.

Задача 1. При каких p один из корней уравнения $x^2 + px + 18 = 0$ вдвое больше другого?

Ответ. 9 или -9 .

Решение. Пусть корни уравнения есть a и $2a$. По теореме Виета $a + 2a = -p$, $a \cdot 2a = 18$. Значит, $a = \pm 3$, $p = -3a$.

Критерии. За потерю второго решения – вычитаются 2 балла. За ответ без обоснования – 0 баллов. Допускается решение без использования теоремы Виета. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

2. Известно, что число $a = \frac{x}{x^2 - x + 1}$ рационально. Доказать, что число $b = \frac{x^2}{x^4 - x^2 + 1}$ также рационально.

Решение. При $x = 0$ число $b = 0$ – рационально. Если $x \neq 0$, то и $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда можно записать $\frac{1}{a} = x - 1 + \frac{1}{x}$, $\frac{1}{b} = x^2 - 1 + \frac{1}{x^2}$. Значит, $x + \frac{1}{x} = \frac{1}{a} + 1$. Возведем это равенство в квадрат, получим $x^2 + 2 + \frac{1}{x^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} + 1$, откуда $\frac{1}{b} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a} - 2$, то есть $b = \frac{a^2}{1 + 2a - 2a^2}$. В силу рациональности a эта дробь также рациональна. Осталось только проверить, что b всегда существует. Знаменатель мог бы обратиться в ноль при $a = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$, что невозможно в силу рациональности a .

Критерии. Если не исследован случай $x = 0$, снимается 1 балл. Если не проверено, что b существует – снимается 3 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

3. Натуральное число n таково, что числа $2n + 1$ и $3n + 1$ являются квадратами. Может ли при этом число n быть простым?

Ответ. Нет, не может.

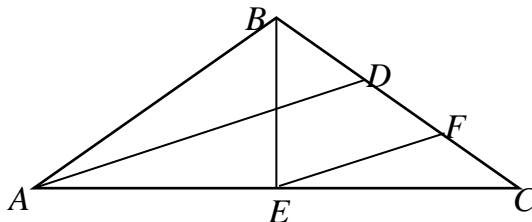
Решение. Пусть $2n + 1 = a^2$ и $3n + 1 = b^2$, тогда

$$n = (3n + 1) - (2n + 1) = b^2 - a^2 = (b - a)(b + a).$$

Если число n — простое, то $b - a = 1$ и $b + a = n$. Из этих равенств легко выразить числа a и b через n : $a = \frac{n-1}{2}$ и $b = \frac{n+1}{2}$. Подставив выражение для a в исходное равенство $2n + 1 = a^2$, получим квадратное уравнение $n^2 - 10n - 3 = 0$, которое не имеет целых корней. Значит, такого простого числа n нет.

Критерии. Доказано только равенство $n = (b - a)(b + a)$ — 2 балла.

4. Угол при вершине B равнобедренного треугольника ABC равен 108° . Докажите, что биссектриса угла A вдвое больше биссектрисы угла B .



Решение. Пусть AD и BE — биссектрисы равнобедренного треугольника ABC . Через точку E проведём отрезок EF параллельно AD , тогда EF — средняя линия треугольника ACD , и $EF = \frac{1}{2}AD$. Несложным подсчётом углов получаем $\angle FBE = \angle BFE = 54^\circ$, и значит, треугольник BEF — равнобедренный. Отсюда $BE = EF = \frac{1}{2}AD$, и поэтому $AD = 2 \cdot BE$.

Критерии. В случае полного обоснования — оценка 7 баллов.

5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1×3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?

Ответ.

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» раскраска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки понадобится не менее 11 полосок (оценка). На рисунке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования — по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее — по 3 балла за каждый пункт. Полное решение — 7 баллов.

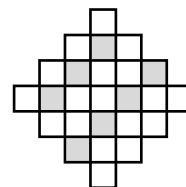


Рис. 1, а

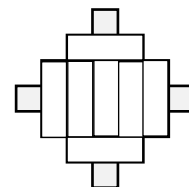


Рис. 1, б

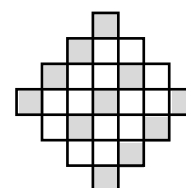


Рис. 2, а

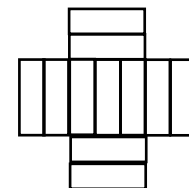


Рис. 2, б

Решения задач муниципального этапа всероссийской олимпиады школьников
по математике 2017 год
10 класс

1. Известно, что $\sin(\alpha + \beta) = 0,2$ и $\cos(\alpha - \beta) = 0,3$. Вычислите $\sin(\alpha + 45^\circ) \cdot \sin(\beta + 45^\circ)$.

Ответ. 0,25.

Решение. По формуле для синуса суммы углов имеем

$$\sin(\varphi + 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin \varphi + \cos \varphi),$$

и значит, $P = \sin(\alpha + 45^\circ) \cdot \sin(\beta + 45^\circ) = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta)$. Раскрывая скобки и вновь используя формулу для синуса и косинуса суммы углов, получим

$$P = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) = 0,25.$$

Критерии. Доказано равенство $P = \frac{1}{2}(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \beta + \cos \beta) = 1$ балл.

2. При каких q один из корней уравнения $x^2 - 12x + q = 0$ является квадратом другого?

Ответ. –64 или 27.

Решение. Пусть корни уравнения есть a и a^2 . По теореме Виета $a + a^2 = 12$, $a \cdot a^2 = q$. Значит, $a = -4$ или $a = 3$, $q = a^3$.

Критерии. Только ответ – 1 балл. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

3. Пусть x_1, x_2, \dots, x_{100} — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x , что $|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{100}| = 50$?

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{100}| - 50$, непрерывную на отрезке $[0; 1]$. Имеем $f(0) = x_1 + x_2 + \dots + x_{100} - 50$, $f(1) = (1 - x_1) + (1 - x_2) + \dots + (1 - x_{100}) - 50$. Значит, $f(0) + f(1) = \sum x_i + \sum (1 - x_i) - 100 = 0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x \in [0; 1]$, при котором $f(x) = 0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

4. Две окружности, радиусы которых относятся как 2 : 3, касаются внутренним образом. Через центр меньшей окружности проведена прямая, перпендикулярная линии центров, из точек пересечения этой прямой с большей окружностью проведены касательные к меньшей окружности. Найти углы между этими касательными.

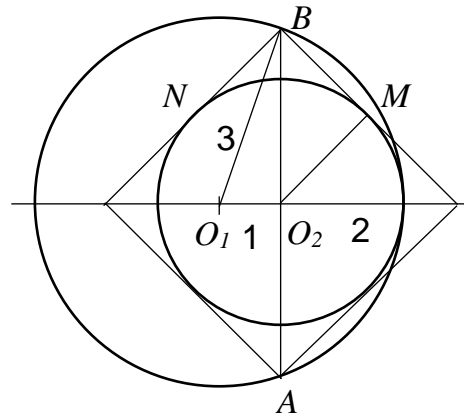
Ответ. Все углы прямые.

Решение. По теореме Пифагора $O_2B = \sqrt{9 - 1} = 2\sqrt{2}$. Из прямоугольного треугольника O_2BM находим $BM = 2$. Значит, треугольник O_2BM равнобедренный, с углом 45° . Аналогично и угол O_2BN составляет 45° .

Итак, касательные, проведенные из одной точки к меньшей окружности перпендикулярны между собой.

Можно проводить расчет и другими способами.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.



5. а) Какое наибольшее количество неперекрывающихся полосок 1×3 можно уместить на салфетке, изображенной на рисунке? б) Какое наименьшее количество полосок 1×3 потребуется, чтобы покрыть салфетку целиком, если полоски могут перекрываться?

Ответ.

Решение. а) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 1,а («диагональная» раскраска). Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки. Поскольку чёрных клеток всего 7, мы не можем уместить на салфетке более 7 полосок (оценка). На рисунке 1,б приведён пример 7 полосок, которые можно разместить на салфетке.

б) Раскрасим клетки на салфетке, как показано на рисунке 2,а. Каждая полоска 1×3 не может содержать более одной чёрной клетки.

Поскольку чёрных клеток всего 11, для покрытия салфетки по-надобится не менее 11 полосок (оценка). На рисунке 2,б приведен пример 11 полосок, которые целиком покрывают салфетку.

Критерии. Ответ без обоснования – по 1 баллу за каждый пункт. Доказано, что число наибольшее или наименьшее – по 3 балла за каждый пункт. Полное решение – 7 баллов.

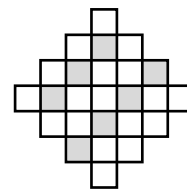


Рис. 1, а

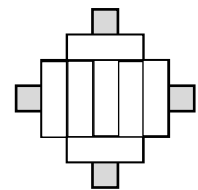


Рис. 1, б

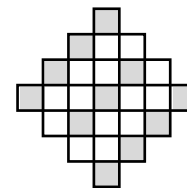


Рис. 2, а

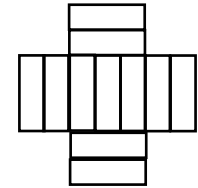


Рис. 2, б

11 класс

1. При каких p один из корней уравнения $x^2 - px + p = 0$ является квадратом другого? (считаем, что корни уравнения различны)

Ответ. $2 \pm \sqrt{5}$.

Решение. Обозначим корни a и a^2 . По теореме Виета $a + a^2 = p$, $a \cdot a^2 = p$. Значит, $a + a^2 = a^3$. Корень $a = 0$ не подходит, так как у уравнения $x^2 = 0$ корни совпадают. С учетом $a \neq 0$ получаем, что $a^2 - a - 1 = 0$, корнями этого уравнения являются $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$. При этом $p = a^2 + a = (a + 1) + a = 2a + 1$.

Критерии. Если не отброшен лишний корень, снимается 2 балла. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

2. Петя нашёл сумму всех нечётных делителей некоторого чётного натурального числа n , а Вася – сумму всех его чётных делителей. Может ли произведение их результатов оказаться равным 2016? Если может, найдите все такие числа n .

Ответ. 88 и 192.

Решение. Пусть $n = m \cdot 2^k$ – исходное чётное число, и m – его нечётный множитель. Сумма нечётных делителей числа n совпадает с суммой s всех делителей числа m , и значит, Петя получит число s . Сумма всех чётных делителей n состоит из суммы делителей, которые делятся только на 2, из суммы делителей, кратных только 4, и так далее, и наконец, из суммы делителей, кратных 2^k . Каждый нечётный делитель при умножении на 2 – это делитель, кратный только 2, поэтому первая сумма равна $2s$, вторая сумма – $4s$ и так далее. Следовательно, сумма всех чётных делителей будет $2s + 4s + \dots + 2^k s = 2(2^k - 1)s$. Произведение результатов Пети и Васи равно $2s^2(2^k - 1) = 2016$, и, значит, $s^2(2^k - 1) = 1008$.

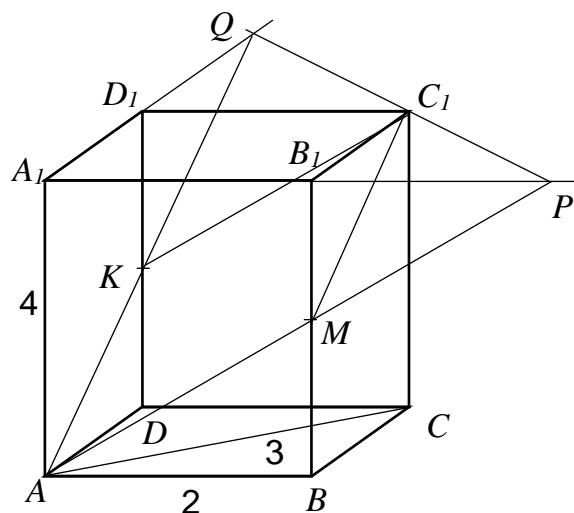
Полученное равенство означает, что число $1008 = 24 \cdot 32 \cdot 7$ делится на квадрат натурального числа $s > 1$ и число вида $2^k - 1$. Среди разложений числа $1008 = 2^2 \cdot 252 = 3^2 \cdot 112 = 4^2 \cdot 63 = 6^2 \cdot 28 = 12^2 \cdot 7$, содержащих квадрат натурального числа, сомножитель вида $2^k - 1$ содержат только разложения $4^2 \cdot 63$ и $12^2 \cdot 7$. Значит, $s = 4$, $k = 6$, или $s = 12$, $k = 3$. В первом случае, $m = 3$, и значит, $n = 3 \cdot 2^6 = 192$; во втором – $m = 11$, и значит, $n = 11 \cdot 2^3 = 88$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

3. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ стороны $AB = 2$, $AC = 3$, $AA_1 = 4$. Найти площадь сечения AMK , где M – середина BB_1 и K – середина DD_1 .

Ответ. $2\sqrt{14}$

Решение. Построим искомое сечение (см. рисунок). Точка P есть пересечение AM и $A_1 B_1$, В силу по-



ложения точки M A_1P вдвое больше, чем A_1B_1 . Аналогично строим точку Q , $A_1Q = 2A_1D_1$. Значит, PQ параллельно B_1D_1 и проходит через точку C_1 . Итак, сечение является параллелограммом AKC_1M .

Площадь можно вычислить разными способами.

1 способ. Заметим, что $KM = BD = AC = 3$, $AM = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$, $AD = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$, $AK = \sqrt{5+4} = 3$. Итак, треугольник AKM равнобедренный, его высота равна $\sqrt{9-2} = \sqrt{7}$. Тогда площадь сечения составляет $2\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 2\sqrt{14}$.

2 способ. Используем векторы. Известно, что $S = |\vec{AK}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \sin \varphi$, в то время как $(\vec{AK} \cdot \vec{AM}) = |\vec{AK}| \cdot |\vec{AM}| \cdot \cos \varphi$ значит, $S^2 = \vec{AK}^2 \cdot \vec{AM}^2 - (\vec{AK} \cdot \vec{AM})^2$. Заметим, что с параллелепипедом можно связать систему координат с началом с точке A . Имеем $\vec{AK} = (0, \sqrt{5}, 2)$ и $\vec{AM} = (2, 0, 2)$. Тогда $\vec{AK}^2 = 5 + 2^2 = 9$, $\vec{AM}^2 = 2^2 + 2^2 = 8$, $(\vec{AK} \cdot \vec{AM}) = 0 + 0 + 4 = 4$ откуда и следует ответ.

Замечание. Возможны и другие способы вычисления площади. Например, через векторное произведение векторов \vec{AK} и \vec{AM} .

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

4. Пусть x_1, x_2, \dots, x_{100} — некоторые числа, принадлежащие отрезку $[0; 1]$. Верно ли, что на этом отрезке найдётся такое число x , что $|x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{100}| = 50$?

Ответ. Верно.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = |x - x_1| + |x - x_2| + \dots + |x - x_{100}| - 50$, непрерывную на отрезке $[0; 1]$. Имеем $f(0) = x_1 + x_2 + \dots + x_{100} - 50$, $f(1) = (1 - x_1) + (1 - x_2) + \dots + (1 - x_{100}) - 50$. Значит, $f(0) + f(1) = \sum x_i + \sum (1 - x_i) - 100 = 0$.

Если числа $f(0)$ и $f(1)$ равны 0, то уравнение имеет, по крайней мере, два корня: 0 и 1. Если же одно из этих чисел отрицательное, то другое — положительное. Поскольку f — непрерывная функция, существует такое $x \in [0; 1]$, при котором $f(x) = 0$.

Критерии. В случае полного обоснования – оценка 7 баллов.

5. На доске размером 10×10 стоят 10 небьющих друг друга ладей. Можно ли остальные клетки доски замостить доминошками? (Доминошка — прямоугольник размером 1×2 или 2×1 .)

Ответ. Нельзя.

Решение. Для каждой ладьи с номером i обозначим через s_i сумму номеров строки и столбца, в которых она стоит. Поскольку ладьи не бьют друг друга, то номера всех строк и столбцов встречаются ровно по одному разу. Сумма всех чисел s_i независимо от расстановки будет чётной и равна

$$\sum_{i=1}^{10} s_i = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + 10) = 110$$

Из этого равенства, в частности, следует, что количество нечётных чисел s_i будет чётным. Таким образом, из 10 чисел s_i количества нечётных и чётных значений не совпадают. Предположим, левый нижний угол доски покрашен в чёрный цвет, тогда у всех чёрных клеток доски числа s_i чётные, а у белых клеток — нечётные. Поскольку количества нечётных и чётных значений s_i не совпадают, ладей на чёрных и белых клетках — разное количество. Значит, разными будут и количества белых и чёрных свободных от ладей клеток. Так как каждая доминошка закрывает по одной чёрной и белой клетке доски, то оставшиеся свободные клетки выложить доминошками не удастся.

Критерии. В случае полного обоснования — оценка 7 баллов.