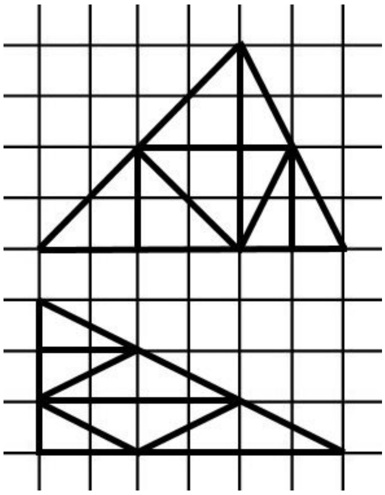
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
7 класс, финальный тур. 9 февраля 2018 года.
Решения задач. Критерии оценивания работ

1. Разрежьте какой-нибудь треугольник (на ваш выбор) на прямоугольные треугольники так, чтобы не все треугольники в этом разрезании были одинаковы, но треугольников каждого размера было одно и то же количество, бóльшее одного.

Решение: Приведем два из многих способов сделать это.



2. У Пети есть 9 различных натуральных чисел. Он расставляет их по кругу и находит все разности между числом и следующим за ним по часовой стрелке. Докажите, что он сможет так расставить эти числа, чтобы произведение всех 9 полученных разностей было положительным.

Первое решение: Выпишем наши девять чисел по убыванию: $a_1 > a_2 > \ldots > a_8 > a_9$. Теперь запишем их по кругу в следующем порядке: a_1, a_2, $\ldots$, a_7, a_9, a_8. Отрицательных разностей окажется ровно две: $a_9 - a_8$ и $a_8 - a_1$. Поэтому произведение всех разностей будет положительно.

Замечание. Если расставить числа по возрастанию, то отрицательных разностей будет 8, и такая расстановка сразу даст решение задачи.

Второе решение: Запишем все данные числа по кругу в произвольном порядке. Если произведение разностей оказалось положительно, мы уже нашли нужную расстановку. Если нет, запишем все числа в обратном порядке. Все разности поменяют знак, и их произведение, поскольку в нем нечётное число сомножителей, — тоже.

Критерии. Взяты конкретные 9 чисел (например, 1, 2, $\ldots$, 9) и приведена их правильная расстановка — 2 балла (на самом деле по сути это — первое решение).

Присутствует идея о перестановке соседних чисел в расстановке, не удовлетворяющей требованию, но решение не доведено до конца — 2 балла.

Верное решение в предположении, что разности считаются против часовой стрелки — 3 балла.

Недостаточное описание алгоритма, в котором не оговорено явно, что числа упорядочиваются по возрастанию/убыванию — 4 балла.

Недостаточное описание алгоритма, подкрепленное примером на конкретных числах — 5 баллов.

В расстановке по убыванию сделана перестановка двух соседних чисел без обоснования, почему это решает задачу — 5 баллов.

3. Четыре мальчика и четыре девочки сидят за круглым столом (в произвольном порядке). Докажите, что можно найти четверых сидящих подряд так, что среди них будет поровну мальчиков и девочек.

Решение: Заметим, что где-то за столом сидят рядом мальчик (М) и девочка (Д). Действительно, возьмем любого мальчика и посмотрим на его соседа справа. Если это девочка, мы уже нашли такую пару. Если он снова мальчик, посмотрим уже на его соседа справа и так далее. Не позже, чем через 4 шага мы найдем девочку, сидящую справа от мальчика.

Теперь посмотрим на соседей этой пары: □МД□ (белые квадратики). Если они разного пола, то мы нашли четверых человек, среди которых по два М и две Д. Предположим, что они одного пола. Без ограничения общности можно считать, что они оба — мальчики и у нас есть четыре человека ММДМ подряд (если они оба — девочки, то получается симметричная ситуация, только две одинаковых буквы будут с правого края). Посмотрим на человека слева от крайнего левого мальчика: □ММДМ. Если это девочка, то мы нашли требуемую четверку. Если это мальчик, то у нас есть МММДМ, и тогда справа от крайнего правого мальчика может сидеть только девочка (всех четверых мальчиков мы уже нашли), и требуемая четверка — это крайние четыре человека справа: МММДМД.

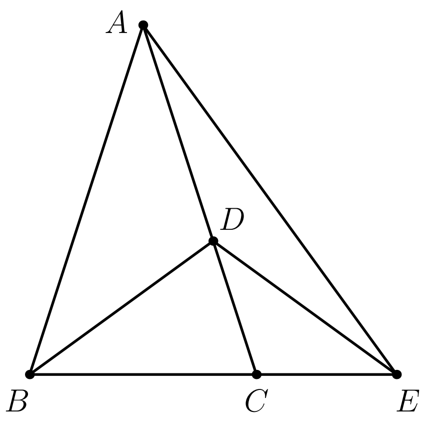
Критерии. Неполный перебор возможных расстановок в четверке с пропуском как минимум двух вариантов — 0 баллов.

Неполный перебор, в котором отсутствует один случай ДМДД или ДДДД (или аналогичные) — 3 балла.

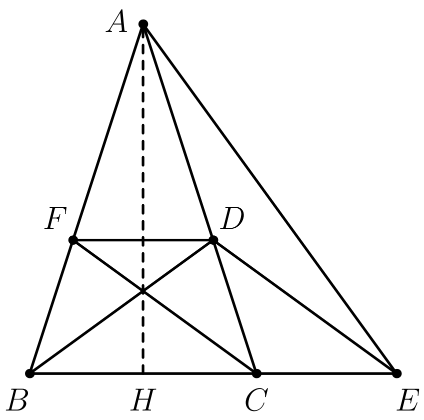
4. В равнобедренном треугольнике ABC ($AB = AC$) проведена биссектриса BD. На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка E так, что $CE = CD$. Оказалось, что $DE = AD$. Докажите, что $BC = BD$.

Первое решение: Треугольник ADE — равнобедренный. Пусть $\angle DAE = \angle DEA = \alpha$. Тогда $\angle CDE = 2\alpha$ как внешний угол для $\triangle ADE$. Поскольку $CD = CE$, отсюда следует, что $\angle CED = 2\alpha$. Следовательно, $\angle BCD = 4\alpha$ как внешний угол для $\triangle CDE$. Из того, что $AB = AC$, получаем, что $\angle ABC = 4\alpha$. Но BD — биссектриса этого угла, следовательно, $\angle CBD = \angle ABD = 2\alpha$. Заметим, что $\angle DBE = \angle DEB$, следовательно, треугольник BDE — равнобедренный и $BD = CD$. Отсюда в свою очередь следует, что треугольник BDA — равнобедренный и $BD = DA$. Следовательно, $\angle DAB = \angle DBA = 2\alpha$. Тогда $\angle BDC = 4\alpha$ как внешний угол для $\triangle BDA$. Окончательно имеем $\angle BDC = \angle DCB$, откуда $BD = BC$.

Замечание. Из решения следует, что сумма углов треугольника ABC равна 10α, откуда $\alpha = 18°$, а углы этого треугольника равны $\angle A = 36°$, $\angle B = \angle C = 72°$.



Второе решение: Проведем вторую биссектрису CF. Заметим, что тогда $DF \| BC$. Действительно, весь треугольник ABC симметричен относительно высоты AH, опущенной из вершины A (эта высота совпадает с биссектрисой и медианой). Поэтому при такой симметрии биссектрисы CF и BD переходят друг в друга, значит, точки D и F переходят друг в друга. Тогда $DF \perp AH$, откуда $DF \| BC$. Пусть $\angle B = \angle C = 2\alpha$, тогда $\angle ABD = \angle DBC = \angle ACF = \angle FCB = \alpha$ (биссектрисы) и $\angle CFD = \angle BDF = \alpha$ (параллельность и накрест лежащие). Отсюда следует, что $BF = FD = CD$ (равнобедренные треугольники BFD и FDC). Угол DCB — внешний для равнобедренного треугольника CDE, поэтому сумма углов CDE и CED равна 2α, но они равны между собой, поэтому они тоже равны α. Тогда $\triangle BDE$ — равнобедренный, $BD = DE$. Поэтому $BD = AD$, откуда $\angle BAD = \angle ABD = \alpha$. Таким образом, сумма углов треугольника ABC равна $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 5\alpha = 180^\circ$, откуда $\alpha = 36^\circ$. Тогда в треугольнике BDC мы знаем два угла $\angle DBC = 36^\circ$ и $\angle DCD = 72^\circ$. Следовательно, $\angle BDC = 180^\circ - 36^\circ - 72^\circ = 72^\circ$, откуда $BD = BD$.



Критерии. Сформулировано, но не доказано утверждение, что $BD \perp AE$ или равносильное ему (сумма углов какого-то из треугольников равна $5x = 180^\circ$) — 1 балл.

5. Найдите все решения уравнения $\dfrac{xy^2}{x+y} = p$ в натуральных числах x, y, p таких, что число p — простое.

Ответ: $x = y = p = 2$ и $x = 6$, $y = 2$, $p = 3$.

Решение: Запишем уравнение в виде $xy^2 = p(x+y)$. Поскольку правая часть делится на простое число p, на него должен делиться один и множителей в левой части. Поэтому либо x, либо y делятся на p.

1) Пусть x делится на p, тогда $x = pk$. Подставив это в наше уравнение, получим $ky^2 = pk + y$, откуда $y = k(y^2 - p)$ и, следовательно, y делится на k. Пусть $y = kz$. Подставим это в уравнение и получим $k^3z^2 = pk + kz$, откуда, сократив на $k > 0$, придем к равенству $k^2z^2 = p + z$, из которого следует, что p делится на z. Так как p — простое, его делителем могут быть только числа 1 и p.

а) Рассмотрим случай $z = p$. Тогда $k^2p^2 = 2p$, откуда $k^2p = 2$. Поскольку p не может равняться 1, отсюда $p = 2$ и тогда $k = 1$. Поэтому $x = pk = 2$, $y = kz = 2$.

б) Рассмотрим случай $z = 1$. Тогда $k^2 = p + 1$. Перепишем это в виде $k^2 - 1 = p$ и разложим левую часть на множители: $(k-1)(k+1) = p$. Так как число p — простое, и $k + 1 > k - 1$, отсюда следует, что возможен только вариант $k - 1 = 1$, $k + 1 = p$. Тогда $k = 2$, $p = 3$, $x = pk = 6$, $y = kz = 2$.

2) Пусть y делится на p, тогда $y = pz$. Подставив это в наше уравнение, получим $xpz^2 = x + pz$. Рассмотрим два случая.

а) $z = 1$. Тогда $xp = x + p$. Перепишем это в виде $xp - x - p + 1 = 1$ и разложим левую часть на множители: $(x-1)(p-1) = 1$. Отсюда $x - 1 = p - 1 = 1$ и $x = p = 2$. Тогда

$y = pz = 2$. Этот ответ мы уже получили ранее.

б) $z \geqslant 2$. Тогда $z^2 \geqslant 2z$, откуда $xpz^2 \geqslant 2xpz = xpz + xpz > x + pz$, так как $xpz > x$ (p — простое, поэтому оно не меньше 2) и $xpz \geqslant pz$. Следовательно, в этом случае уравнение не имеет решений.

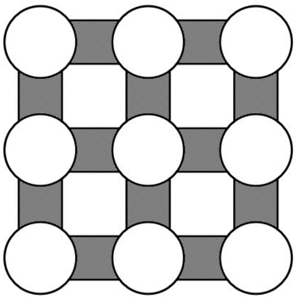
Замечания. Решить уравнение $xpz^2 = x + pz$ можно так же, как и в случае 1), заметить, что x делится на z, тогда $x = kz$ и $kpz^2 = p + k$. Тогда $k = p(kz^2 - 1)$ делится на p и одновременно $p = k(pz^2 - 1)$ делится на k. Следовательно, $k = p$ и $pz^2 = 2$, откуда $p = 2$, $z = 1$.

Решить уравнение $xp = x + p$ можно и другими способами, например, заметить, что $x = p(x - 1)$ делится на p и $p = x(p - 1)$ делится на x. Следовательно, $x = p$ и тогда $p^2 = 2p$, откуда $p = 2$. Авторы задач намеренно привели различные способы решения этих уравнений.

Критерии. Приведены оба ответа — 1 балл.

Частичные продвижения, основанные на том, что если $a + b = c$ и два из трех чисел делятся на k, то и третье тоже делится — не выше 2 баллов.

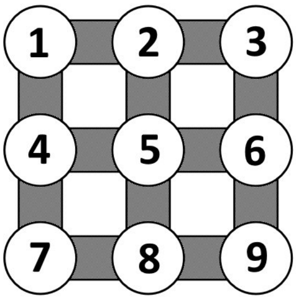
6. В старинном замке 9 круглых залов, 12 переходов между ними и 4 квадратных внутренних двора (см. рисунок). Охотникам за привидениями нужно поймать проклятое привидение. Привидение — невидимое и из-за проклятия обязательно раз в час (в 18:00, в 19:00 и т.д.) быстро перелетает из круглого зала, где находится, в соседний зал по переходу (обозначены серым цветом). Для поимки привидения у охотников есть переносные энергетические ловушки, которые одновременно срабатывают 1 раз в час (в 18:30, в 19:30 и т.д.). Если привидение будет в зале, где сработает ловушка, то оно будет поймано, и охотники об этом узнают. Если привидение не поймано, охотники за привидениями могут быстро (за 15 минут) перенести любое количество имеющихся ловушек в другие залы замка. Привидение видит, куда охотники перенесли ловушки. У охотников нет способов обнаружить привидение, кроме как поймать его. Какое минимальное число ловушек должно быть у охотников, чтобы они могли поймать привидение? Объясните, каким образом им действовать с таким количеством ловушек, чтобы гарантированно поймать привидение.



Ответ: 2 ловушки.

Решение: Докажем, что одной ловушки не хватит. Действительно, в каждом зале у привидения есть два выхода. Видя ловушку, привидение может полететь в другой зал.

Приведем алгоритм действий, позволяющий обойтись двумя ловушками. Занумеруем залы как на картинке.



Представим, что мы знаем, что в ближайшее время срабатывания ловушек, привидение будет в зале с чётным номером. Тогда последовательность расстановки двух ловушек (2, 4), (5, 7), (6, 8), (3, 5), (2, 4) гарантированно ловит привидение. (Действительно, если оно было в залах 2 или 4, оно поймано сразу. В противном случае оно было в залах 6 или 8 и могло перелететь в один из залов 3, 5, 7, 9. Дальше мы проверили 5 и 7, и если не поймали, значит оно было в залах 3 или 9, откуда перелетело в 2, 6 или 8. Следующим шагом проверили 6 и 8, если не поймали, значит оно точно было в зале 2. Отсюда оно могло перелететь в залы 1, 3 или 5. Проверили 3 и 5, если не поймали, значит оно было в зале 1, откуда могло попасть только в залы 2 или 4.) Проделаем эту последовательность. Если привидение не поймано, это означает, что во время первого срабатывания оно было в зале с нечётным номером. Значит, к ближайшему (шестому) срабатыванию, оно будет в чётном зале, и теперь мы знаем это точно. Еще раз применив ту же самую последовательность расстановки двух ловушек, мы гарантированно поймаем привидение.

Критерии. Верное доказательство, что не хватит одной ловушки — 2 балла.

Верный *обоснованный* алгоритм поимки двумя ловушками — 5 баллов.

Если замечена перемена чётности — 1 балл.

Умение поймать привидение, зная его первоначальную чётность — 3 балла (этот критерий не суммируется с предыдущим).