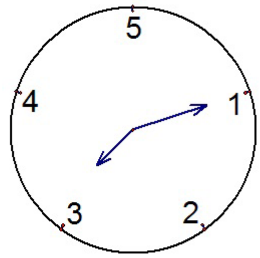
Математическая олимпиада школьников Республики Татарстан
6 класс, финальный тур. 9 февраля 2018 года.
Решения задач. Критерии оценивания работ

1. Расставьте в клетках квадрата 3×3 цифры 1 или 2 так, чтобы все шесть трехзначных чисел, получаемых по строкам и столбцам были различны.

Решение: Пусть по строкам сверху вниз получаются числа 121, 211, 222. Тогда по столбцам получаются числа 122, 212, 112. Как видно, они все различны. Есть и другие примеры.

1	2	1
2	1	1
2	2	2

2. На планете Транай в сутках ровно 10 часов, в каждом часе ровно 30 минут, а в каждой минуте ровно 20 секунд. Сейчас часы показывают 3 часа 06 минут после полудня (полдень на этой планете наступает в 5 часов 00 минут местного времени). Сколько будет времени (в часах, минутах, секундах), когда минутная стрелка впервые догонит часовую? Ответ обоснуйте.



Ответ: 3 часа 22 минуты 10 секунд.

Решение: За 5 часов с полудня до полуночи часовая стрелка проходит 1 круг, а минутная 5 кругов, т.е. минутная обгоняет часовую ровно на 4 круга. Таким образом, эти две стрелки совпадают каждые 5/4 часа. 3 часа 6 минут после полудня это больше, чем $2\cdot\frac{5}{4}=2{,}5$ часа, но меньше, чем $3\cdot\frac{5}{4}=3\frac{3}{4}$ часа. Значит, стрелки совпадут через $3\frac{3}{4}$ часа после полудня. На часах будет 3 часа 22 минуты 10 секунд.

3. В зале собрались 1009 мудрецов. У них было 2017 карточек, пронумерованных всеми натуральными числами от 1 до 2017: При этом у старшего мудреца была одна карточка, у каждого из остальных по две. Все мудрецы знают числа только на своих карточках. Каждый, кроме старшего мудреца, сказал: «Я знаю, что я не могу отдать старшему мудрецу никакую из своих карточек так, чтобы сумма чисел на его двух карточках стала равна 2018». Какое число на карточке у старшего мудреца? Ответ обоснуйте.

Ответ: 1009.

Первое решение: Если у одного из мудрецов есть карточка с числом 1, то он должен быть уверен, что у старшего мудреца нет карточки с числом 2017. В этом можно быть уверенным только тогда, когда карточка с числом 2017 тоже в руках у этого мудреца. Точно так же, мудрец с карточкой, на которой написано число 2, имеет еще и карточку с числом 2016, с карточкой, на которой стоит число 3, еще и карточку с числом 2015, и т. д. Все карточки у мудрецов разобьются на пары с суммой 2018. Но на такие пары разбиваются все карточки, кроме карточки с числом 1009. Именно она у старшего мудреца.

Второе решение: Пусть у старшего мудреца на руках карточка с числом a. Тогда карточки с числом $2018-a$ нет на руках ни у одного из остальных мудрецов, иначе он бы не смог сделать заявление, указанное в условии задачи. Но это значит, что карточка с числом $2018-a$ тоже у старшего мудреца. Так как у него на руках только одна карточка, то $a=2018-a$, откуда $a=1009$.

4. Существуют ли 6 различных натуральных попарно взаимно простых чисел a, b, c, d, e, f таких, что число $ab+cd+ef$ делится нацело на каждое из этих чисел? Ответ обоснуйте. (Напомним, что два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих натуральных делителей, отличных от 1.)

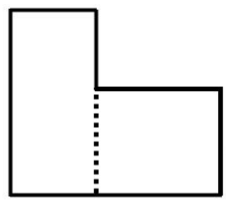
Ответ: Не существуют.

Решение: Так как числа взаимно просты, сумма $ab+cd+ef$ делится на $abcdef$ нацело. Поделим $ab+cd+ef$ на $abcdef$, получится

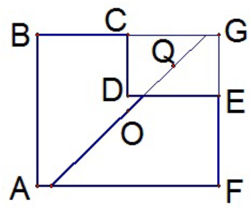
$$\frac{1}{cdef}+\frac{1}{abef}+\frac{1}{abcd}.$$

Каждая из этих дробей не больше $\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 5}=\dfrac{1}{30}$, а значит их сумма меньше 1 и не может быть целым числом.

5. Два прямоугольника приложили друг к другу так, чтобы получился шестиугольник (см. рисунок, размеры могут отличаться от приведенных на рисунке, пунктиром отмечена линия, по которой прямоугольники приложены друг к другу). Как, используя только линейку без делений, построить прямую, делящую данный шестиугольник на два многоугольника, имеющих одинаковую площадь?



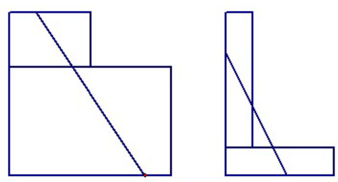
Решение: Обозначим исходный шестиугольник как $ABCDEF$ и достроим его до прямоугольника $ABGF$ (см. рисунок). Пусть O и Q центры прямоугольников $ABGF$ и $CDEG$ соответственно. (Указанное построение, и нахождение точек Q и O легко делаются одной линейкой.) Проведем прямую OQ. Она требуемая.



Докажем это. Любая прямая, проходящая через центр прямоугольника, делит его на два равных многоугольника, поэтому делит его площадь пополам. Значит, прямая OQ делит и $ABGF$ и $CDEG$ на две равновеликие части. Поэтому прямая OQ делит и площадь шестиугольника $ABCDEEF$ пополам.

Остается показать, что прямая OQ делит шестиугольник $ABCDEF$ на два (а не на три) многоугольника. В самом деле, если получилось три части, то прямая OQ пересекла отрезки CD и DE и поэтому не могла пройти через центр прямоугольника $CDEG$.

Примечание. У задачи, на первый взгляд, существует аналогичное решение, связанное с представлением шестиугольника в виде объединения (а не разности) двух прямоугольников (см. рисунок). Однако такое решение проходит не всегда, так как построенная прямая в этом случае может разрезать шестиугольник не на две, а на три части (см. рисунок справа). Следовательно, такое построение решением в общем случае не является.



6. В прошлом году было 55 занятий кружка 6 класса. Перед первым занятием была выбрана команда из 6 человек. На каждом следующем занятии преподаватели обсуждали, кого из состава команды стоит заменить (любое количество от 1 до 6 школьников). При этом никаких замен не происходило. Известно, что никакого школьника не хотели заменить в течении двух подряд идущих занятиях. Верно ли, что было два занятия, когда преподаватели выбирали одних и тех же школьников?

Ответ: Верно.

Решение: Докажем методом от противного, пусть на каждом занятии был свой набор школьников на замену. Назовем занятие, где выбрали одного или двух школьников *простым*, где выбрали трех — *средним*, где выбрали четыре или пять — *сложным*.

Количество способов выбрать одного или пять школьников равно 6, двоих или четверых — $\frac{6\cdot 5}{2}=15$, троих — $\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}=20$. Выбирать сразу 6 школьников нельзя, так как в соседние дни (такой найдется хотя бы один) нельзя будет выбрать ни одного школьника.

Сложные занятия могут стоять только рядом с простыми, иначе какой то школьник будет выбран два занятия подряд. Из этих же соображений, *более двух* средних занятий тоже не может идти подряд.

Всего простых занятий $6 + 15 = 21$. Они разбивают остальные занятия на не более чем 22 группы из одного или двух занятий. Групп из двух занятий может быть не более $20 : 2 = 10$. Тогда всего занятий может быть не более $21 + 10 \cdot 2 + (22 - 10) = 53$. Противоречие.