

Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

1 класс

*В олимпиаде оцениваются полные решения.
Только ответы будут оценены существенно ниже.*

1. Поставьте вместо звездочек знаки «+» или «-», чтобы получилось верное равенство:

$$7 * 4 * 2 * 5 = 10.$$

Решение: $7 - 4 + 2 + 5 = 10$.

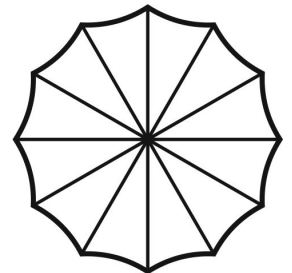
Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

2. Оля рисует картину, на рисунке у нее есть бабочки, цветы и облака, при этом бабочек меньше, чем облаков, а цветов столько, сколько бабочек и облаков вместе. Сколько бабочек на рисунке, если всего изображено 8 элементов?

Решение: Цветочков на картинке столько же, сколько бабочек и облаков вместе. Разделим 8 на два равных количества. Получаем, что цветов 4. Бабочек и облаков вместе тоже 4. $4=1+3=2+2=3+1$. Во втором варианте бабочек и облаков поровну, он не подходит. Значит нужно выбрать вариант $4=1+3$. Бабочек меньше, чем облаков. Значит бабочка на рисунке одна.

Критерии: верное решение - 7 баллов; только верный ответ - 2 балла; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

3. Раскрасьте волшебный зонтик в 4 цвета так, чтобы любые три сектора подряд были раскрашены в три разных цвета и всего синих секторов было 2; зеленых 3; красных 4; белых 3.

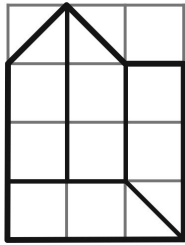
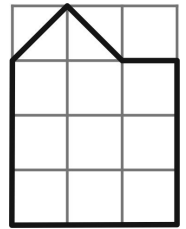


Решение:

(Есть другие верные раскраски.)

Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

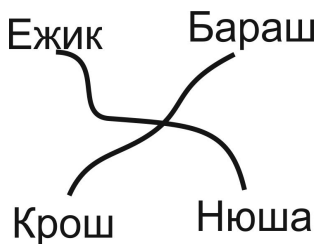
4. Разрежьте фигуру изображенную на рисунке на 4 равные по форме и размеру части. Резать можно как по сторонам клеточек, так и по их диагоналям.



Решение:

Критерии: верное решение - 7 баллов; приведена фигурка - 2 балла, решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

5. В Стране Смешариков построили дороги как показано на рисунке. Если Ежик пойдет в гости к Крошу по дорогам, то ему придется пройти 5 км, путь от Бараша до Ньюши – 8 км, а от Ежика до Бараша – 4 км. Ньюша собралась в гости к Крошу. Сколько километров придется ей пройти по дорогам?

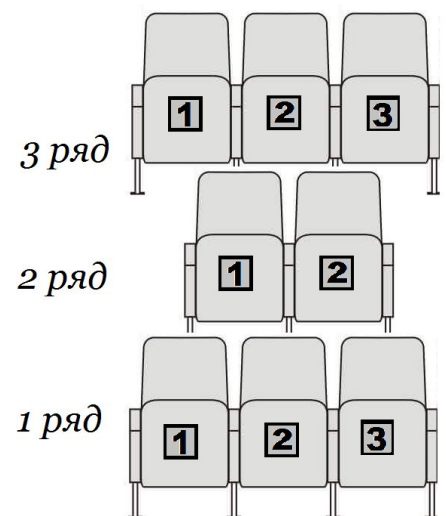


Решение: От домиков смешариков до перекрестка ведут четыре дороги. Общая длина этих дорог равна $13 \text{ км} = 5 \text{ км} + 8 \text{ км}$ (Ежик по дороге до Кроша пройдет целиком две из этих дорожек - 5 км, а Бараш, отправившись к Ньюше оставшиеся две дорожки 8 км.) Из этих 13 км две дорожки длиной 4 км это маршрут Ежик-перекресток-Бараш. Значит две дороги Крош-перекресток и перекресток - Ньюша имеют общую длину $13 \text{ км} - 4 \text{ км} = 9 \text{ км}$.

Критерии: верное решение - 7 баллов; только верный ответ - 2 балла; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

6. Белоснежка и семь гномов пошли в кино. Умник и Скромник сели рядом. Весельчак и Чихун на места с номером 1, а Простачок, Соня и Ворчун на один ряд. Где сидит Белоснежка? Докажите, что она не может сидеть на другом месте.

Решение: Простачок, Соня и Ворчун сели втроем на один ряд. Этот ряд первый или третий (на втором не хватит мест). На оставшихся двух рядах (в том числе на среднем) места с номером 1 заняты Весельчаком и Чихуном. Остались 2 места на



втором ряду и два места (2е и 3е) на первом или третьем. Умник и Скромник сидят рядом. Значит Белоснежке осталось место 2 на втором ряду.

Критерии: верное решение - 7 баллов; только верный ответ - 1 балл; верный ответ с одним из примеров рассадки гномов из которого следует, что Белоснежка действительно может сидеть на этом месте, такой вариант не противоречит условию - 2 балла; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

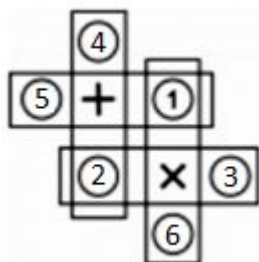
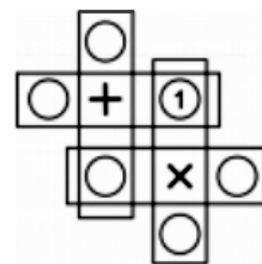
Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

2 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.

Только ответы будут оценены существенно ниже.

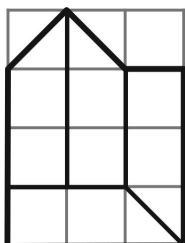
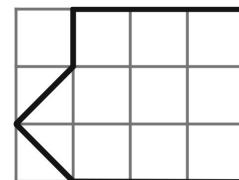
1. Расставьте числа от 2 до 6 так, чтобы в каждом прямоугольнике результат вычислений (сумма или произведение чисел) был одним и тем же числом.



Решение:

Критерии. Описка, которая очевидно устраняется - 3 балла.

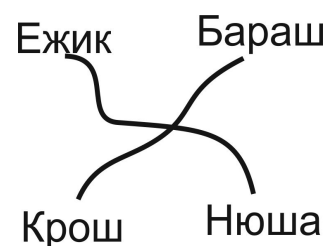
2. Разрежьте фигуру изображенную на рисунке на 4 равные по форме и размеру части. Резать можно как по сторонам клеточек, так и по их диагоналям.



Решение:

Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

3. В Стране Смешариков построили дороги как показано на рисунке. Если Ежик пойдет в гости к Крошу по дорогам, то ему придется пройти 5 км, путь от Бараша до Нюши – 8 км, а от Ежика до Бараша – 4 км. Нюша собралась в гости к Крошу. Сколько километров придется ей пройти по дорогам?



Решение: От домиков смешариков до перекрестка ведут четыре дороги. Общая длина этих дорог равна $13 \text{ км} = 5 \text{ км} + 8 \text{ км}$ (Ежик по дороге до Кроша пройдет целиком две из этих дорожек - 5 км, а Бараш, отправившись к Нюше оставшиеся две дорожки 8 км.) Из этих 13 км две дорожки длиной 4 км это

маршрут Ежик-перекресток-Бараш. Значит две дороги Крош-перекресток и перекресток - Нюша имеют общую длину $13 \text{ км} - 4 \text{ км} = 9 \text{ км}$.

Критерии. Только ответ - 1 балл.

Выведен ответ из предположений, которых нет в задаче - 2 балла. Например, из предположения, что путь от Ежика до Бараша делится перекрестком пополам.

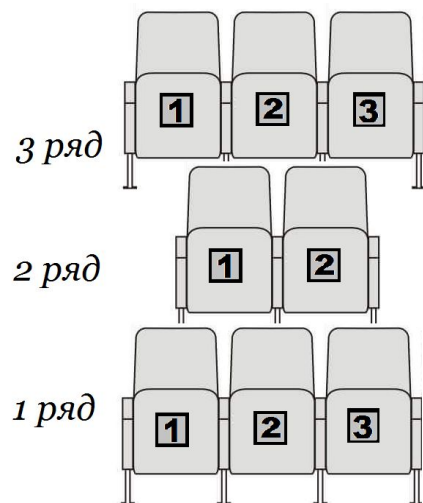
Решение без достаточного обоснования - 5 баллов.

4. У Васи есть палочки длиной 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 см. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?

Решение: Например, можно сделать прямоугольник со сторонами 6 и 17. В таком случае стороны должны быть составлены из $6; 4+2; 8+9; 10+7$. Есть другие решения.

Критерии. Указан только прямоугольник без указания как получаются стороны - 2 балла.

5. Белоснежка и семь гномов пошли в кино. Умник и Скромник сели рядом. Весельчак и Чихун на места с номером 1, а Простачок, Соня и Ворчун на один ряд. Где сидит Белоснежка? Докажите, что она не может сидеть на другом месте.



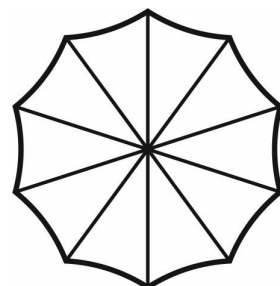
Решение: Простачок, Соня и Ворчун сели втроем на один ряд. Этот ряд первый или третий (на втором не хватит мест). На оставшихся двух рядах (в том числе на среднем) места с номером 1 заняты Весельчаком и Чихуном. Остались 2 место на втором ряду и два места (2е и 3е) на первом или третьем. Умник и Скромник сидят рядом. Значит Белоснежке осталось место 2 на втором ряду.

Критерии. Только ответ - 1 балл.

Ответ с примером - 2 балла.

Решение в предположении, что тройка Простачок, Соня и Ворчун сидит на первом (или третьем) ряду - 4 балла.

6. Можно ли раскрасить волшебный зонтик в 4 цвета так, чтобы любые три сектора подряд были раскрашены в три разных цвета и всего синих секторов было 2; зеленых 3;



красных 1; белых 4. (Если можно, то приведите пример, если нельзя - объясните почему.)

Решение: Пойдем по кругу в одном из направлений. После каждого белого сектора должно быть два или больше секторов других цветов. Значит других цветов должно быть не меньше 8. А их $2+3+1=6$. Следовательно раскрасить зонтик невозможно.

Критерии. Замечено без обоснования, что не может быть четырех белых секторов - 2 балла.

Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

3 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.

Только ответы будут оценены существенно ниже.

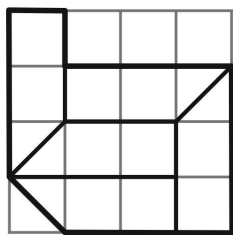
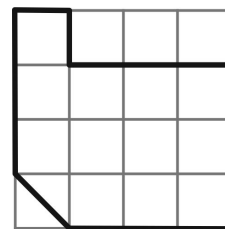
1. Замените звездочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все семь цифр были различными:

$$** + ** = 138.$$

Решение: $96+42=138$ (Есть другие ответы).

Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

2. Разрежьте фигуру изображенную на рисунке на 5 равных по форме и размеру частей. Резать можно как по сторонам клеточек, так и по диагоналям.



Решение:

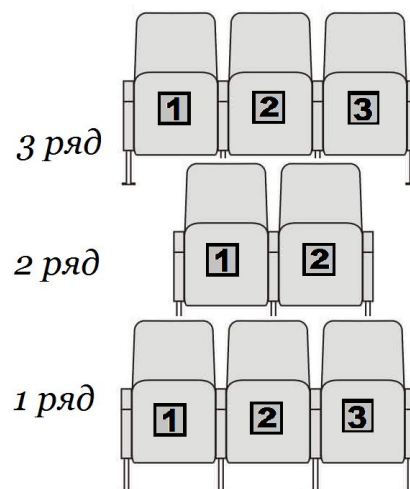
Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

3. У Васи есть палочки длиной 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10 см. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?

Решение: Например, можно сделать прямоугольник со сторонами 6 и 17. В таком случае стороны должны быть составлены из $6; 4+2; 8+9; 10+7$. Есть другие решения.

Критерии. Указан только прямоугольник без указания как получаются стороны - 2 балла.

4. Белоснежка и семь гномов пошли в кино. Умник и Скромник сели рядом. Весельчак и Чихун на места с номером 1, а Простачок, Соня и Ворчун на один ряд. Где сидит Белоснежка? Докажите, что она не может сидеть на другом месте.



Решение: Простачок, Соня и Ворчун сели втроем на один ряд. Этот ряд первый или третий (на втором не хватит мест). На оставшихся двух рядах (в том числе на среднем) места с номером 1 заняты Весельчаком и Чихуном. Остались 2 место на втором ряду и два места (2е и 3е) на первом или третьем. Умник и Скромник сидят рядом. Значит Белоснежке осталось место 2 на втором ряду.

Критерии: верное решение - 7 баллов; только верный ответ - 1 балл; верный ответ с одним из примеров рассадки гномов из которого следует, что Белоснежка действительно может сидеть на этом месте, такой вариант не противоречит условию - 2 балла; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

5. Кошка, мошка и картошка решили написать книгу. Кошка настаивает на том, что героев в книге должно быть 10, и среди них обязательно должна быть мышка. Картошка считает, что больше половины из них должны быть овощи. Мошка, что насекомых, среди героев должно быть ровно на 3 больше, чем кошек. Андрюша послушал их и заметил, что в таком случае мышек и кошек в книге будет поровну. Прав ли он?

Решение: По утверждению Кошки всего 10 героев. Среди них есть одна мышка, а также (по утверждению Картошки) среди героев есть минимум шесть овощей. Значит не меньше 7 героев уже понятны. Осталось не больше трех неизвестных героев. Если среди них есть кошка, то насекомых не больше двух и пожелание Мошки не выполнено. Значит Кошек среди героев книги нет, а мышка есть. Следовательно Андрюша не прав.

Критерии: пример без объяснения, почему он подходит - 4 балла

6. Музей математики работает по нечетным числам месяца, по средам, по субботам, а также в дни равные номеру месяца (например 3 марта). Могло ли когда-то так оказаться, что музей работал 10 дней подряд?

Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

4 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.

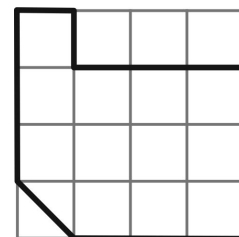
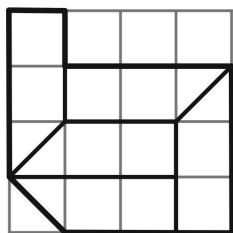
Только ответы будут оценены существенно ниже.

1. Замените звездочки цифрами так, чтобы равенство стало верным и все восемь цифр были различными: $** + *** = 560$.

Решение: Например, $81 + 479 = 560$ (Есть другие ответы).

Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

2. Разрежьте фигуру изображенную на рисунке на 5 равных по форме и размеру частей. Резать можно как по сторонам клеточек, так и по диагоналям.



Решение:

Критерии: верное решение - 7 баллов; решение неверно или отсутствует - 0 баллов.

3. Кошка, мошка и картошка решили написать книгу. Кошка настаивает на том, что героев в книге должно быть 10 и среди них обязательно должна быть мышка. Картошка считает, что больше половины из них должны быть овощи. Мошка, что насекомых, среди героев должно быть ровно на 3 больше, чем кошек. Андрюша послушал их и заметил, что в таком случае мышек и кошек в книге будет поровну. Прав ли он?

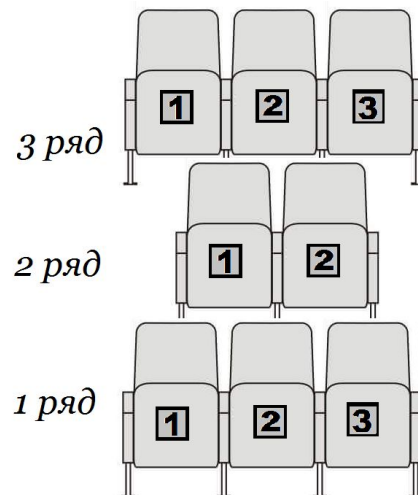
Решение: По утверждению Кошки всего 10 героев. Среди них есть одна мышка, а также (по утверждению Картошки) среди героев есть минимум шесть овощей. Значит не меньше 7 героев уже понятны. Осталось не больше трех неизвестных героев. Если среди них есть кошка, то насекомых не больше двух и пожелание Мошки не выполнено. Значит Кошек среди героев книги нет, а мышка есть. Следовательно Андрюша не прав.

Критерии:

4. Разменный аппарат меняет тугрики на фантики. За 4 тугрика аппарат выдает 6 фантиков, за 5 тугриков – 7 фантиков, а за 6 тугриков – 8 фантиков. Других операций аппарат не производит. Фома потратил 180 тугриков на то, чтобы получить в аппарате 250 фантиков. Сколько операций совершил Фома в разменном аппарате?

Ответ. 35 операций. Решение. За каждую операцию Фома получает на 2 фантика больше, чем потратил тугриков. Так как всего фантиков он получил на 70 больше, чем потратил тугриков, то операций он совершил $70:2=35$.

5. Белоснежка и семь гномов пошли в кино. Умник и Скромник сели рядом. Простачок, Весельчак и Соня оказались на местах с одинаковыми номерами. Белоснежка сидит выше Ворчуна и Чихуна. Где именно сидит Белоснежка?



6. У ведьмы есть капсулы с омолаживающим порошком, весом 180, 181, 182, ..., 200 миллиграмм (по одной каждого веса). Чтобы обрести бессмертие, нужно выпить 1 грамм омолаживающего порошка. (Открывать капсулы небезопасно, нужно глотать их целиком). Докажите, что ведьма не сможет жить вечно.

Ответ. Нет. Решение. Сумма масс шести самых легких флаконов $180 + 181 + 182 + 183 + 184 + 185 = 1095 > 1000$ г, а сумма пяти самых тяжелых $200 + 199 + 198 + 197 + 196 = 990 < 1000$ г. Таким образом, 6 и более флаконов всегда будут весить больше 1 кг, а 5 и менее — меньше 1 кг. Значит, нельзя выбрать несколько флаконов массой ровно 1 кг.

Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

5 класс

В олимпиаде оцениваются полные решения.

Только ответы будут оценены существенно ниже.

1. У Васи есть палочки длиной 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?

Решение: Например, можно сделать прямоугольник со сторонами 6 и 17. В таком случае стороны должны быть составлены из $6; 4+2; 8+9; 10+7$.

2. Найдите такие 4 натуральных числа, что при увеличении каждого из них на 1, произведение всех четырех увеличится в 3 раза?

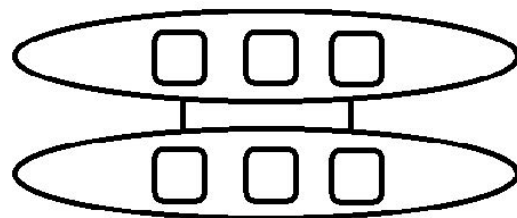
Решение: Подходят, например, числа 2,3,4,5. Их произведение 120. А произведение чисел 3,4,5,6 равно 360.

3. Кошка, мошка и картошка решили написать книгу. Кошка настаивает на том, что героев в книге должно быть 10 и среди них обязательно должна быть мышка. Картошка считает, что больше половины из них должны быть овощи. Мошка, что насекомых, среди героев должно быть ровно на 3 больше, чем кошек. Андрюша послушал их и заметил, что в таком случае мышек и кошек в книге будет поровну. Прав ли он?

Решение: Предположим, что Андрюша прав. Тогда по утверждению Кошки всего 10 героев. Среди них есть одна мышка, а также (по утверждению Андрюши) есть одна кошка. По утверждению Картошки среди героев есть шесть овощей. По утверждению Мошки среди героев есть четыре насекомых (потому что одна кошка есть, а насекомых на 3 больше). Значит героев есть $1+1+6+4=12$. Но у нас их 10. Значит наше предположение не верно. Значит Андрюша не прав.

Критерии: Разобран случай когда мышка одна, овощей 6 - 1 балл.

4. 33 богатыря весом: 10, 20, 30, ..., 330 кг соответственно хотят переправиться на другой берег реки. У них есть 6-местный неустойчивый катамаран (3 места слева, 3 места справа). Вес сидящих на правом и левом борту должен быть равным при каждой переправе (иначе он перевернется). Количество людей может быть



разным. Катамаран без людей сам плыть не может. Смогут ли они переправиться через реку?

Решение: Предположим, что богатыри могут переправиться. При каждой переправе масса богатырей, которые переезжают на другой берег делится на 20. Действительно, на каждой стороне масса делится на 10, а с двух сторон катамарана одинаковое масса, а значит суммарная масса делится на 20. Но на изначальном берегу суммарная масса богатырей 5510, не кратна 20. Значит она никогда не будет кратна 20. В частности, не станет равной 0.

5. Тимофей раскрасил клетки таблицы 4×4 в три цвета так, что каждая клетка имеет общие стороны с клетками двух других цветов. Докажите, что клеток каждого цвета не меньше четырех.

Решение 1: Посмотрим на угловую клетку. Пусть она красная. Около нее всего две соседние клетки. Значит эти две клетки двух оставшихся цветов. Значит в уголке из трех клеток есть все три цвета. Поскольку углов 4, то каждого цвета как минимум 4.

Решение 2: Предположим, что клеток какого-то цвета меньше четырех. Тогда у этих клеток есть не более 12 соседних клеток. Тогда всего клеток других цветов не более 12. Значит всего клеток не более $3+12=15$. Противоречие. Значит наше предположение не верно. Значит каждого цвета не менее 4.

6. У Коли есть 40 внешне одинаковых монет, среди которых 3 фальшивые, которые легче настоящих (все фальшивые весят одинаково и настоящие тоже) и чашечные весы без гирь. Как при помощи трех взвешиваний на этих весах Коле найти 17 настоящих монет?

Решение: Первым взвешиванием взвесим по 20 монет на каждой чаше весов. Одна из чаш будет тяжелее, а значит в ней будет ровно одна фальшивая монета. Далее мы будем работать только с этими 20 монетами. Разделим их на кучи 7,7,6 монет. Вторым взвешиванием взвесим по 7 монет из этих 20. Таким образом мы узнаем в какой из этих куч фальшивая монета (или в той, которая месит легче, в противном случае в куче их 6 монет). Разделим подозрительную кучу (та, в которой есть фальшивая) на 2,2,2 или 3,2,2 кучи. Третьим взвешиванием взвесим две кучи по 2 монеты. Таким образом мы найдем кучу, в которой фальшивая. В этой куче не более трех монет. Значит остальные монеты из изначальной кучи в 20 монет настоящие, а их 17.

Олимпиада по математике г. Казани (3.03.2018)

6 класс

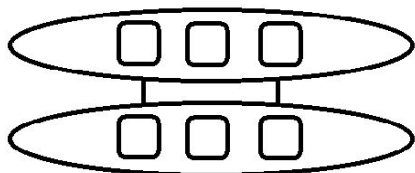
В олимпиаде оцениваются полные решения.

Только ответы будут оценены существенно ниже.

1. У Васи есть палочки длиной 2, 4, 6, 7, 8, 9, 10. Можно ли из них составить контур прямоугольника, не ломая ни одной палочки?

Решение: Можно. Например, можно составить прямоугольник со сторонами 6×17 или 10×9 . В первом случае стороны должны быть составлены из 6, $4+2$, $8+9$, $10+7$, а во втором из $4+6$, 10, $7+2$, 9.

2. 33 богатыря весом: 10, 20, 30, ..., 330 кг соответственно хотят переправиться на другой берег реки. У них есть 6-местный неустойчивый катамаран (3 места слева, 3 места справа). Вес



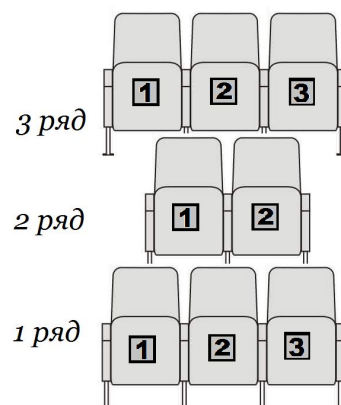
сидящих на правом и левом борту должен быть равным при каждой переправе (иначе он перевернется). Количество людей может быть разным. Катамаран без людей сам плыть не может.

Смогут ли они переправиться через реку?

Решение: Не смогут. В связи с тем, что масса всех богатырей делится на 10, то от того, что все их массы поделить на 10 ничего не нарушится. Тогда на каждой переправе катамаран везёт чётное число килограмм. А общая масса богатырей составляет нечётное число килограмм. Значит они не смогут переправиться.

Критерии: Доказано, что общая масса богатырей после деления на 10 в катамаране на каждой переправе четное число - 3 балла.

Доказано, что общая масса богатырей после деления на 10 нечетное число - 3 балла.



3. Белоснежка и семь гномов пошли в кино. Чихун сел на один ряд выше, чем Умник, а Скромник сел рядом с Простачком. Простачок, Весельчак и Соня оказались на местах с одинаковыми номерами, а Ворчун, Чихун и Весельчак - в одном ряду. Сумма номеров мест Чихуна и Весельчака - составное число. Где место Белоснежки?

Решение: Чихун сидит на ряду, где три места и сидит на ряд выше Умника - значит, Чихун, Весельчак и Ворчун сидят на третьем ряду, а Умник на

втором ряду. Простачок, Весельчак и Соня сидят на одинаковых номерах, то есть по одному в каждом ряду (на первых или вторых местах). Значит, Белоснежка сидит в третьем ряду. Так как Скромник сидит рядом с Простачком, он точно сидит на втором месте, а значит Простачок, Весельчак и Соня занимают первые места. Тогда Белоснежка сидит на третьем месте первого ряда.

Критерии: Отсутствует объяснение, что Весельчак и Чихун на первом и третьем месте штраф 1 балл.

Отсутствует объяснение, что Весельчак на первом штраф 2 балла.

Отсутствует объяснение, что Соня на втором ряду штраф 2 балла.

Только ответ 0 баллов. Ответ с полной рассадкой 1 балл.

4. Музей математики работает по нечетным числам месяца, по средам, по субботам, а также в дни, равные номеру месяца (например, 3 марта). Могло ли когда-то так оказаться, что музей работал 10 дней подряд?

Решение: да, могло. Например он может работает с 29 марта по 7 апреля. 29,31 марта, 1,3,5,7 апреля нечетные дни. 4 апреля - номер для равен номеру месяца. 30 марта и 6 апреля - среда. 2 апреля - суббота.

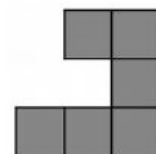
5. У ведьмы есть капсулы с омолаживающим порошком, весом 180, 181, 182, ..., 200 миллиграмм (по одной каждого веса). Чтобы обрести бессмертие, нужно выпить 1 грамм омолаживающего порошка. (Открывать капсулы небезопасно, нужно глотать их целиком). Докажите, что ведьма не сможет жить вечно.

Решение: Если ведьма возьмет пять самых тяжелых капсул, то суммарно она возьмет не более $200+199+198+197+196=990$ миллиграмм порошка. Если же она возьмет шесть самых легких капсул, то суммарно у нее окажется не менее $180+181+182+183+184+185=1095$ миллиграмм порошка. Поэтому никакой вес от 990 до 1095 она получить не сможет. В частности и 1000.

Критерии: Только оценка сверху не более 3 баллов.

Только оценка снизу не более 3 баллов.

6. Фигурки, изображенные на рисунке, размещают по линиям сетки внутри квадрата 6×6 , возможно с наложениями. Какого



наименьшего числа фигурок хватит, чтобы покрыть ими все клетки квадрата?

Решение: Посмотрим на угловые клетки, а также на клетки, которые являются соседними по вершине с ними. Никакие две из этих клеток нельзя покрыть одной данной фигурой. Поэтому на каждую из восьми этих клеток нужна своя фигура. Значит фигур не может быть меньше 8. Пример на 8 фигур: из двух фигур легко получить прямоугольник 3×4 . А четырьмя такими прямоугольниками легко покрыть весь квадрат 6×6 .

Критерии: верный пример на 8 фигур - 1 балл. Только ответ - 0 баллов.