Заочная вступительная работа. 7 класс

Вторая (заочная) волна поступления. 20 марта – 20 апреля 2018 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **20-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XI класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. В коробке лежат синие, красные и черные ручки трех типов: гелевые, шариковые и капиллярные. Известно, что имеются ручки всех трех цветов и всех трех типов. Верно ли, что обязательно найдутся три ручки, попарно различающиеся одновременно и по цвету, и по типу?

2. В магазине продаются пончики, булочки, леденцы, торты и лотерейные билеты. Маша купила 5 пончиков, 6 булочек и 7 леденцов. Миша — 6 пончиков, 16 булочек и 11 леденцов, а Саша — 2 пончика, 4 булочки и 8 леденцов. А мама приобрела один торт за 1000 рублей. Она сказала, что потраченных всеми денег хватило бы ровно на 13 лотерейных билетов. Докажите, что мама ошибается.

3. В чемпионате школы по шахматам участвовал 31 ученик. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. По окончании чемпионата выяснилось, что каждый из них выиграл ровно у двух и проиграл ровно двум своим одноклассникам. Докажите, что хотя бы одна партия закончилась вничью.

4. Андрей, Паша и Миша пробежали дистанцию в 1 км с постоянными скоростями. Когда Андрей финишировал, Паша отставал от него на 100 м, а Миша отставал от Паши на 90 м. Паша закончил бег на 18 секунд позже Андрея. На сколько секунд позже Паши прибежал Миша?

5. В треугольнике ABC на медиане AF выбрана такая точка D так, что $AD = DF$, $BD = BF$. Пусть CD пересекает сторону AB в точке M. Докажите, что $AM = DM$.

6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что пол его резиденции имеет форму выпуклого шестиугольника, одна сторона которого равна 1 метру, а длины всех диагоналей — целые числа. Могут ли слова Барона быть правдой?

7. Мила хочет подобрать различные простые числа a и b так, чтобы для любого простого p значение выражения $a^2p + b$ было составным. Сможет ли она это сделать?

8. Доска 9×9 раскрашена в шахматную раскраску так, что угловые клетки — чёрные. На каждой чёрной клетке спит мышь. По свистку мыши просыпаются и переползают на соседнюю по диагонали клетку. Какое наименьшее число клеток может оказаться занято мышами после одного свистка?

Заочная вступительная работа. 8 класс

Вторая (заочная) волна поступления. 20 марта – 20 апреля 2018 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **20-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XI класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. В коробке лежат синие, красные и черные ручки трех типов: гелевые, шариковые и капиллярные. Известно, что имеются ручки всех трех цветов и всех трех типов. Верно ли, что обязательно найдутся три ручки, попарно различающиеся одновременно и по цвету, и по типу?

2. Обозначим через $P(n)$ произведение всех простых чисел, не превосходящих n. Найдите все значения $n > 1$, для которых $P(n) \leqslant n$.

3. В чемпионате школы по шахматам участвовал 31 ученик. Каждый сыграл с каждым ровно один раз. По окончании чемпионата выяснилось, что каждый из них выиграл ровно у двух и проиграл ровно двум своим одноклассникам. Докажите, что хотя бы одна партия закончилась вничью.

4. Вам сообщили числа a^2, b^2, c^2, заверив, что a, b и c — положительные числа. Разрешается выполнять операции сложения, вычитания и умножения, а также запоминать любое количество промежуточных результатов и сравнивать их между собой. Можно ли, используя только эти операции, проверить справедливость равенства $a + b = c$?

5. На сторонах AB, BC и AC треугольника ABC выбраны точки P, Q, R соответственно таким образом, что $AR = PR$, $CR = RQ$ и BR — биссектриса угла PRQ. Докажите, что прямые PQ и AC параллельны.

6. Барон Мюнхгаузен утверждает, что пол его резиденции — выпуклый шестиугольник, одна сторона которого равна 1 метру, а длины всех диагоналей — целые числа. Могут ли слова Барона быть правдой?

7. Мила хочет подобрать различные простые числа a и b так, чтобы для любого простого p значение выражения $a^2p + b$ было составным. Сможет ли она это сделать?

8. В мешке лежат 10000 шариков ста цветов: по сто шариков каждого цвета. Олег каждую минуту вынимает из мешка очередной шарик. Он очень хочет в какой-нибудь момент разбить все уже вынутые шарики на тройки, в каждой из которых шарики трёх разных цветов. Также он хочет, чтобы какой-нибудь цвет присутствовал во всех тройках. Докажите, что не позже, чем через 5 часов, ему это удастся.

Заочная вступительная работа. 9 класс

Вторая (заочная) волна поступления. 20 марта – 20 апреля 2018 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **20-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XI класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Через точку K, не лежащую на окружности S, проведены касательные KB и KD к этой окружности (B и D — точки касания) и прямая, пересекающая окружность в точках A и C. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AC в точке E и окружность S в точке F. Докажите, что $\angle FDE = 90°$.

2. В Однобоком графстве между некоторыми, но, к счастью, ещё не между всеми, усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом, при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединёнными дорогой до этого, появится возможность добраться из любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.

3. Вам сообщили числа a^2, b^2, c^2, заверив, что a, b и c — положительные числа. Разрешается выполнять операции сложения, вычитания и умножения, а также запоминать любое количество промежуточных результатов и сравнивать их между собой. Можно ли, используя только эти операции, проверить справедливость равенства $a + b = c$?

4. Даны числа $x > y > 0$, произведение которых больше 1. Докажите, что $\dfrac{x^3 + y^3}{x - y} > 4$.

5. Из точки M внутри остроугольного треугольника ABC опущены перпендикуляры MN и MK на стороны AB и AC соответственно. Оказалось, что прямая NK параллельна BC. Пусть O — центра описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки A, M и O лежат на одной прямой.

6. На доске написаны числа от 1 до 100. Сначала к доске подошла Маша и стерла несколько чисел с суммой, делящейся на 102. Затем к доске подошел Петя и стер несколько чисел с суммой, делящейся на 203. Может ли сумма оставшихся на доске чисел делиться на 304?

7. В мешке лежат 10000 шариков ста цветов: по сто шариков каждого цвета. Олег каждую минуту вынимает из мешка очередной шарик. Он очень хочет в какой-нибудь момент разбить все уже вынутые шарики на тройки, в каждой из которых шарики трёх разных цветов. Также он хочет, чтобы какой-нибудь цвет присутствовал во всех тройках. Докажите, что не позже, чем через 5 часов, ему это удастся.

8. В Эрафии водятся Лазурные, Кристаллические, Ржавые, Сказочные драконы. Известно, что Лазурный дракон — самый сильный, Кристаллический — второй по силе, Ржавый — третий, а Сказочный замыкает четвёрку. Два героя набрали себе по 100 драконов каждый. Если первый будет составлять пары сражающихся драконов, то он сможет гарантировать себе n побед (между парами одинаковых драконов фиксируется ничья). Столько же побед сможет гарантировать себе второй, если составлять пары будет он. Найдите наибольшее значение n.

Заочная вступительная работа. 10 класс

Вторая (заочная) волна поступления. 20 марта – 20 апреля 2018 года

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до **20-го апреля** на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр XI класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Через точку K, не лежащую на окружности S, проведены касательные KB и KD к этой окружности (B и D — точки касания) и прямая, пересекающая окружность в точках A и C. Биссектриса угла ABC пересекает отрезок AC в точке E и окружность S в точке F. Докажите, что $\angle FDE = 90^\circ$.

2. В Однобоком графстве между некоторыми, но, к счастью, ещё не между всеми, усадьбами проложены дороги с односторонним движением. При этом, при появлении любой новой дороги (также с односторонним движением) между усадьбами, не соединёнными дорогой до этого, появится возможность добраться из любой усадьбы до любой другой, не нарушая правил. Докажите, что такая возможность имеется уже сейчас.

3. Вам сообщили числа a^2, b^2, c^2, заверив, что a, b и c — положительные числа. Разрешается выполнять операции сложения, вычитания и умножения, а также запоминать любое количество промежуточных результатов и сравнивать их между собой. Можно ли, используя только эти операции, проверить справедливость равенства $a + b = c$?

4. В клетках таблицы 3×3 стоят положительные числа. При этом произведение чисел в любых двух соседних клетках равно 5 (соседние клетки имеют общую сторону). Докажите, что сумма всех чисел в таблице не меньше 20.

5. Из точки M внутри остроугольного треугольника ABC опущены перпендикуляры MN и MK на стороны AB и AC соответственно. Оказалось, что прямая NK параллельна BC. Пусть O — центра описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что точки A, M и O лежат на одной прямой.

6. На доске написаны числа от 1 до 100. Сначала к доске подошла Маша и стерла несколько чисел с суммой, делящейся на 102. Затем к доске подошел Петя и стер несколько чисел с суммой, делящейся на 203. Может ли сумма оставшихся на доске чисел делиться на 304?

7. Для изготовления магического жезла надо знать 20 заклинаний. Каждый маг знает 5 заклинаний. При этом магов так много, что любой возможный набор из пяти заклинаний известен какому-то магу. Какое наименьшее число отрядов магов можно создать так, чтобы ни в одном отряде не смогли сделать магический жезл силами магов этого отряда?

8. В Эрафии водятся Лазурные, Кристаллические, Ржавые, Сказочные драконы. Известно, что Лазурный дракон — самый сильный, Кристаллический — второй по силе, Ржавый — третий, а Сказочный замыкает четвёрку. Два героя набрали себе по 100 драконов каждый. Если первый будет составлять пары сражающихся драконов, то он сможет гарантировать себе n побед (между парами одинаковых драконов фиксируется ничья). Столько же побед сможет гарантировать себе второй, если составлять пары будет он. Найдите наибольшее значение n.