Олимпиада по алгебре. Тестовый тур

13 ноября

1. Учитель написал на доске многочлен $(6x^2 - 8x + 3)^{100} \cdot (8x^2 + 4x + 1)^{100}$.

(a) Какую степень имеет этот многочлен?

(i) 100; **(ii)** 200; **(iii)** 400; **(iv)** 2; **(v)** среди предложенных вариантов нет правильного;

(vi) не знаю.

Ответ. 400.

(b) Чему равна сумма коэффициентов этого многочлена?

(i) 14; **(ii)** 14^{100}; **(iii)** 13; **(iv)** 13^{100}; **(v)** среди предложенных вариантов нет правильного;

(vi) не знаю.

Ответ. 13^{100}. **Решение.** Сумму коэффициентов можно посчитать, подставив $x = 1$. Отсюда и ответ.

(c) Чему равен свободный член этого многочлена?

(i) 3; **(ii)** 3^{100}; **(iii)** 4; **(iv)** 4^{100}; **(v)** среди предложенных вариантов нет правильного;

(vi) не знаю.

Ответ. 3^{100}.

(d) Сколько нечетных коэффициентов у этого многочлена?

(i) 0; **(ii)** 1; **(iii)** 3^{100}; **(iv)** 10000; **(v)** среди предложенных вариантов нет правильного;

(vi) не знаю.

Ответ. 1. **Решение.** Рассмотрев многочлен по модулю 2, получаем, что он равен $3^{100} \cdot 1^{100}$, и свободный член является его единтсвенным нечетным коэффициентом.

2. (a) Маша думает, что при любом a выполнено $a + \frac{1}{a} \geqslant 2$. Права ли Маша?

Ответ. Нет, не права. **Решение.** Например, для отрицательных a неравенство неверно.

(b) Данил считает, что для положительных чисел a и b из неравенства $ab > a + b$ следует неравенство $a + b > 4$. Прав ли Данил?

Ответ. Да, прав. **Решение.** По неравенству между средними арифметическим и геометрическим, $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$. Используя условие получаем, что $ab > 2\sqrt{ab}$, или $ab > 4$. Но тогда и $a + b > 4$.

(c) Влад считает, что неравенство

$$\frac{x+y}{2} \leqslant \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}}$$

верно для любых чисел x и y. Прав ли Влад?

Ответ. Да, прав. **Решение.** Во-первых, можно считать, что оба числа x и y неотрицательны: в противном случае заменим числа на их модули, тогда левая часть не уменьшится, а правая не изменится. Далее, возведем неравенство в квадрат и преобразуем. Получим верное неравенство $2xy \geqslant x^2 + y^2$.

(d) Аркадий считает, что неравенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$$

верно при любых a и b. Прав ли Аркадий?

Ответ. Нет, не прав. **Решение.** Данное неравенство не выполняется, например, при $a = -1$, $b = -3$.

3. (a) Верно ли, что сумма двух рациональных чисел всегда рациональна?

Ответ. Да, верно.

(b) Верно ли, что произведение двух иррациональных чисел всегда иррационально?

Ответ. Нет, неверно. **Решение.** Например, $\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} = 4$.

(c) Верно ли, что произведение рацонального числа на иррациональное всегда иррационально?

Ответ. Нет, неверно. **Решение.** Например, $\sqrt{2} \cdot 0 = 0$.

(d) Верно ли, что сумма рационального и иррационального чисел всегда иррациональна?

Ответ. Да, верно.

4. Учитель написал на доске 10 чисел. Вася увеличил каждое из чисел на 1 и сумма их квадратов не изменилась.

(a) Как изменится сумма квадратов чисел, если каждое увеличить на 2?

(i) Не изменится; **(ii)** уменьшится на 10; **(iii)** увеличится на 20; **(iv)** уменьшится на 100; **(v)** нельзя дать однозначный ответ; **(vi)** среди предложенных вариантов нет правильного; **(vii)** не знаю.

Ответ. Увеличится на 20. **Решение.** Обозначим выписанные числа через x_i. Тогда условие записывается как $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2 = (x_1+1)^2+\ldots+(x_{10}+1)^2 = x_1^2+x_2^2+\ldots+x_{10}^2+2(x_1+x_2+\ldots+x_{10})+10$, или $x_1+x_2+\ldots+x_{10} = -5$. После увеличения исходных чисел на 2 разница будет равна $4(x_1+x_2+\ldots+x_{10}) + 40 = 20$, откуда и ответ.

(b) На сколько изменится сумма квадратов чисел, если каждое уменьшить на 1?

(i) Не изменится; **(ii)** уменьшится на 5; **(iii)** увеличится на 10; **(iv)** увеличится на 15; **(v)** нельзя дать однозначный ответ; **(vi)** среди предложенных вариантов нет правильного; **(vii)** не знаю.

Ответ. Среди предложенных вариантов нет правильного. **Решение.** На этот раз разница будет равна $-2(x_1+x_2+\ldots+x_{10})+10 = 20$. Поэтому сумма квадратов увеличится на 20, а среди предложенных вариантов правильного нет.

(c) На сколько изменится сумма квадратов чисел, если каждое увеличить в 2 раза?

(i) Не изменится; **(ii)** увеличится на 40; **(iii)** уменьшится на 40; **(iv)** увеличится на 100; **(v)** нельзя дать однозначный ответ; **(vi)** среди предложенных вариантов нет правильного; **(vii)** не знаю.

Ответ. Нельзя дать однозначный ответ. **Решение.** Полученное условие на сумму чисел является достаточным, поэтому легко подобрать несколько примеров с разным изменением суммы квадратов в данном пункте.

(d) Сколько отрицательных чисел могло быть среди написанных на доске? (В приведенных ответах оба конца включаются.)

(i) От 0 до 10; **(ii)** только 5; **(iii)** от 1 до 10; **(iv)** только все 10; **(v)** ни одного; **(vi)** среди предложенных вариантов нет правильного; **(vii)** не знаю.

Ответ. От 1 до 10. **Решение.** Так как сумма чисел должна быть равна -5, и этого условия достаточно, то хотя бы одно отрицательное число должно быть, при этом все остальные количества, кроме 0, возможны.

5. Какие из следующих утверждений верны?

(a) Если два целых числа a и b взаимно просты, то ab и $a+b$ также взаимно просты.

Ответ. Это утверждение верно.

(b) Еси два целых числа a и b таковы, что a делится на b, то $a \geqslant b$.

Ответ. Это утверждение неверно. **Решение.** Например, для отрицательных чисел.

(c) Если частное $\frac{a}{b}$ двух целых чисел a и b является целым числом, то оно взаимно просто хотя бы с одним из чисел a и b.

Ответ. Это утверждение неверно. **Решение.** Контрпримером являются числа $a = 9$ и $b = 3$.

(d) Если какие-то два члена арифметической прогрессии, состоящей из натуральных чисел, взаимно просты, то любые два члена арифметической прогрессии взаимно просты.

Ответ. Это утверждение неверно. **Решение.** Арифметическая прогрессия, состоящая из всех натуральных чисел, является контрпримером.

6. **(a)** Верно ли, что для любого простого числа p существует число вида $101010\ldots10$, делящееся на p?

Ответ. Да, верно. **Решение.** Для $p = 2$ и $p = 5$ утверждение очевидно. Докажем для остальных простых чисел. Рассмотрим числа 10, 1010, … в количестве $p+1$. Тогда какие-то два дадут одинаковые остатки при делении на p. Рассмотрим их разность. Она делится на это простое p, при этом оканчивается на несколько нулей. Вычеркнем все, кроме одного, на делимость это не повлияет, так как p и 10^k взаимно просты.

(b) Верно ли, что для любого простого числа p, кроме 2, 3 и 5, существует число вида $1000\ldots001$, делящееся на p?

Ответ. Нет, неверно. **Решение.** Например, на 37 ни одно число такого вида не делится. Для этого заметим, что 10^3 дает остаток 1 при делении на 37 (так как 111 делится на 37), и поэтому после числа 1001 остатки зациклятся с периодом три. Осталось проверить, что ни одно из чисел 1, 11, 101, 1001, 10001, 100001 на 37 не делится.

(c) На доске написали число A. Верно ли, что для любого простого числа p, кроме 2 и 5, приписав к числу A слева несколько цифр, можно получить число, делящееся на p?

Ответ. Да, верно. **Решение.** Пусть A состоит из n разрядов. Рассмотрим все числа $1, 2, 3, \ldots, p$. Заметим, что так как 10^{2n} и p взаимно просты, то при домножении всех чисел на 10^{2n} мы снова получим p чисел, дающих все возможные остатки при делении на p. Прибавим ко всем полученным числам A, получим снова все возможные остатки по модулю p, в том числе 0. Соответствующее число нам и нужно написать.

(d) На доске написали число B. Верно ли, что для любого простого числа p, кроме 2, приписав к числу B справа несколько пятерок, можно получить число, делящееся на p?

Ответ. Нет, не верно. **Решение.** Рассмотрим $B = 2$ и $p = 11$. По признаку делимости на 11, числа вида $255\ldots5$ не могут делиться на 11.

7. Какой признак делимости на десятичное число 3_{10} сформулирован верно для различных системах счисления?

(a) Рассмотрим 2-ичную систему счисления.

(i) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(ii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(iii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда последние 3 цифры образуют число, делящееся на 3_{10}.

(iv) Ни один из вышеприведенных признаков не верен.

(v) Не знаю.

Ответ. Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

Решение. Распишем число через сумму степеней 2. Так как $2 \equiv -1$ по модулю 3, то нечетные степени 2 будут сравнимы с -1, а четные — с 1 по модулю 3, откуда и следует указанный признак.

(b) Рассмотрим 4-ичную систему счисления.

(i) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(ii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(iii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда последние 3 цифры образуют число, делящееся на 3_{10}.

(iv) Ни один из вышеприведенных признаков не верен.

(v) Не знаю.

Ответ. Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3_{10}.

Решение. Распишем число через сумму степеней 4. Так как $4 \equiv 1$ по модулю 3, то все степени 4 будут сравнимы с 1 по модулю 3, откуда и следует указанный признак.

(c) Рассмотрим 8-ичную систему счисления.

(i) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(ii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(iii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда последние 3 цифры образуют число, делящееся на 3_{10}.

(iv) Ни один из вышеприведенных признаков не верен.

(v) Не знаю.

Ответ. Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

Решение. Аналогично с пунктом **(a)** распишем число через сумму степеней 8. Так как $8 \equiv -1$ по модулю 3, то нечетные степени 8 будут сравнимы с -1, а четные — с 1 по модулю 3, откуда и следует указанный признак.

(d) Рассмотрим 15-ичную систему счисления.

(i) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(ii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда знакопеременная сумма цифр числа делится на 3_{10}.

(iii) Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда последние 3 цифры образуют число, делящееся на 3_{10}.

(iv) Ни один из вышеприведенных признаков не верен.

(v) Не знаю.

Ответ. Число делится на 3_{10} тогда и только тогда, когда последние 3 цифры образуют число, делящееся на 3_{10}.

Решение. Так как 15 делится на 3, то при представлении числа в виде суммы степеней 15 все слагаемые, кроме, возможно, последнего, будут делиться на 3. Значит, необходимо и достаточно, чтобы последняя цифра делилась на 3.

Комментарий. Достаточно, конечно, делимости на 3 лишь последней цифры, впрочем, сформулированный признак в любом случае верен.

8. Кирилл пошел вместе со своими друзьями в магазин. Каждый мальчик купил 1 тетрадку, а каждая девочка купила 1 ручку. Кирилл посчитал, что если бы, наоборот, мальчики купили по ручке, а девочки по тетрадке, то они бы потратили суммарно на 26 рублей больше. Цены тетрадки и ручки отличаются больше, чем на 10 рублей. При этом друзей-мальчиков у Кирилла больше, чем друзей-девочек.

(a) Сколько всего детей пришло в магазин?

(i) 10; **(ii)** 11; **(iii)** 14; **(iv)** 21; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** ни один из ответов выше не является верным; **(vii)** не знаю.

Ответ. Невозможно определить однозначно.

Решение. Обозначим количество мальчиков через b, а количество девочек через g; цену одной ручки через p, а стоимость одной тетрадки — через c. Тогда дети потратили $bc+gp$ рублей, а могли бы потратить $bp+gc$. Из условия получаем равенство $bp+gc-bc-gp = b(p-c)-g(p-c) = (b-g)(p-c) = 26$. Кроме того, $b - g \geqslant 2$, потому что мальчиков помимо Кирилла больше, чем девочек, а значит с Кириллом их больше хотя бы на 2. При этом если $b - g \geqslant 3$, то разница $p - c$ меньше 10, что противоречит условию. Значит, $b - g = 2$, $p - c = 13$. Отсюда следуют ответы на пункты **(b)** и **(c)**, при этом ограничений на ответы в остальных двух пунктах нет, и легко привести несколько ситуаций с разными ответами, подходящими под условия.

(b) На сколько отличаются количества мальчиков и девочек, пришедших в магазин?

(i) На 1; **(ii)** на 2; **(iii)** на 3; **(iv)** на 4; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** ни один из ответов выше не является верным; **(vii)** не знаю.

Ответ. На 2.

(c) Что дороже, ручка, или тетрадка, и на сколько?

(i) Ручка, на 13 рублей; **(ii)** ручка, на 26 рублей; **(iii)** ручка, на 17 рублей 50 копеек;

(iv) тетрадка, на 26 рублей; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** ни один из ответов выше не является верным; **(vii)** не знаю.

Ответ. Ручка, на 13 рублей.

(d) Сколько у Кирилла друзей-девочек?

(i) 5; **(ii)** 6; **(iii)** 8; **(iv)** 13; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** ни один из ответов выше не является верным; **(vii)** не знаю.

Ответ. Невозможно определить однозначно.

9. Линейная функция задана уравнением $y = kx+b$. Про ее коэффициенты известно, что $k+b > 0$, а $2k + b < 0$.

(a) Может ли график функции пересекать ось абсцисс в точке $x = 3$?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Из неравенств $k + b > 0$ и $2k + b < 0$ следует, что $k < 0$, а $b > 0$. Если график функции пересекает ось абсцисс в точке $x = 3$, то при подстановке координат этой точки в уравнение должно получаться верное равенство, а получается $0 = 3k + b$. При этом $2k + b < 0$ и $k < 0$, значит, это равенство неверно.

(b) Может ли график функции пересекать ось абсцисс в точке $x = -2$?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** По тем же рассуждениям, что и в предыдущем пункте получаем равенство $0 = -2k + b$. Но $-2k > 0$ и $b > 0$, значит, равенство невозможно.

(c) Может ли график функции пересекать ось ординат в точке $y = 3$?

Ответ. Да, может. **Решение.** В этом случае получаем равенство $3 = b$, что вполне возможно, например, при $k = -2$.

(d) Может ли график функции не пересекать ось абсцисс?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Число k не может равняться 0, так как оно отрицательно.

10. Рассмотрим бесконечную возрастающую арифметическую прогрессию.

(a) Пусть сумма любых двух ее членов целая. Верно ли, что тогда прогрессия обязательно состоит из целых чисел?

Ответ. Нет, неверно. **Решение.** Например, прогрессия с первым членом $\frac{1}{2}$ и разностью 1 подходит под условие, но не состоит из целых чисел.

(b) Пусть произведение любых двух ее членов целое. Верно ли, что тогда прогрессия обязательно состоит из целых чисел?

Ответ. Нет, неверно. **Решение.** Например, прогрессия с первым членом $\sqrt{2}$ и такой же разностью удовлетворяет условию, но не состоит из целых чисел.

(c) Предположим, что произведение любых двух ее членов — снова член этой прогрессии. Верно ли, что она обязательно состоит из целых чисел?

Ответ. Да, верно. **Решение.** Обозначим какой-нибудь член этой арифметической прогрессии через a, а разность — через d. Тогда два следующих члена равны $a + d$ и $a + 2d$ соответственно, а произведение их на число a равно $a^2 + ad$ и $a^2 + 2ad$. По условию, это члены арифметической прогрессии, а значит их разность, то есть ad, равна произведению числа d на целое число, значит, a — целое. Так как мы выбрали произвольный член прогрессии и доказали, что он целый, то вся последовательность состоит из целых чисел.

(d) Предположим, что сумма любых двух ее членов — снова член этой прогрессии. Верно ли, что она обязательно состоит из целых чисел?

Ответ. Нет, не верно. **Решение.** Прогрессия с первым членом $\frac{1}{2}$ и такой же разностью удовлетворяет условию, но при этом состоит не только из целых чисел.