# Олимпиада по геометрии. Тестовый тур

*4 декабря*

**1.** В трапеции $ABCD$ основание $BC = 10$, $AD = 4$.

**(a)** В каком отношении диагональ $AC$ делит площадь трапеции?

**(i)** $4 : 14$; **(ii)** $3 : 7$; **(iii)** $4 : 10$; **(iv)** $4 : 6$; **(v)** нельзя определить однозначно; **(vi)** среди указанных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $4 : 10$. **Решение.** В соответствии с формулой площади треугольника имеем в треугольниках $ABC$ и $ACD$ одинаковую высоту, а основания относятся как $4 : 10$.

**(b)** На основании $BC$ выбрана точка $M$ так, что отрезок $DM$ делит площадь трапеции $ABCD$ пополам. В каком отношении точка $M$ делит отрезок $BC$, считая от точки $B$?

**(i)** $1 : 2$; **(ii)** $3 : 7$; **(iii)** $4 : 10$; **(iv)** $4 : 6$; **(v)** нельзя определить однозначно; **(vi)** среди указанных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $3 : 7$. **Решение.** Площадь трапеции равна полусумме оснований, умноженной на высоту. Площадь же треугольника $CDM$ должна составлять половину площади трапеции. Тогда, так как высота одинаковая, точка $M$ должна быть выбрана таким образом, чтобы $CM$ было равно полусумме оснований, то есть $CM = 7$, тогда $BM = 3$, и отношение получается $3 : 7$.

**(c)** На боковой стороне $DC$ выбрана точка $K$ так, что отрезок $BK$ делит площадь трапеции $ABCD$ пополам. В каком отношении точка $K$ делит отрезок $DC$, считая от точки $D$?

**(i)** $1 : 2$; **(ii)** $3 : 7$; **(iii)** $4 : 10$; **(iv)** $4 : 6$; **(v)** нельзя определить однозначно; **(vi)** среди указанных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $3 : 7$. **Решение.** Площади треугольников $DCM$ и $BKC$ составляют по половине площади трапеции. Удалим из каждого указанного треугольника общую часть — $CKM$. Получим, что площади треугольников $DKM$ и $BKM$ равны. Из этого следует, что $BDKM$ — трапеция. Значит, $BD \parallel KM$, откуда $DK : KC = BM : MC = 3 : 7$.

**(d)** Пусть $P$ — середина $AB$. В каком отношении отрезок $CP$ делит площадь трапеции?

**(i)** $10 : 4$; **(ii)** $3 : 7$; **(iii)** $5 : 14$; **(iv)** $2 : 7$; **(v)** нельзя определить однозначно; **(vi)** среди указанных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** среди указанных ответов нет правильного. **Решение.** Высота в треугольнике $BPC$, проведенная из вершины $P$, в два раза меньше высоты трапеции, а основание $BC$ в $\frac{7}{5}$ раз меньше, чем сумма оснований трапеции. Тогда по формулам получаем, что площадь треугольника $PBC$ составляет $\frac{5}{14}$ площади трапеции. Таким образом, отрезок $CP$ делит площадь трапеции в отношении $5 : 9$.

**2.** В параллелограмме $ABCD$ угол $\angle A = 60°$. Пусть $\omega$ — описанная окружность треугольника $ABD$.

**(a)** Верно ли, что точка пересечения медиан треугольника $BCD$ обязательно лежит на $\omega$?

**Ответ.** Нет, не верно. **Решение.** Обозначим точку пересечения медиан через $M$. Рассмотрим, например, треугольник $ABD$ с углами $\angle A = 60°$, $\angle B = 90°$, $\angle D = 30°$, и достроим его до параллелограмма $ABCD$. Обозначим середину $AD$ через $K$. Тогда $\angle BKD = 120°$, а $\angle BMD > \angle BKD = 120°$, при этом точки $M$ и $C$ лежат по разные стороны относительно $BD$. Значит, четырехугольник $MBCD$ не может в этом случае быть вписанным.

**(b)** Верно ли, что точка пересечения высот треугольника $BCD$ обязательно лежит на $\omega$?

**Ответ.** Да, верно. **Решение.** Обозначим указанную точку через $H$. Тогда так как при отражении точки пересечения высот относительно стороны она попадает на описанную окружность, то $\angle BHD = 120°$, и, кроме того, точка $H$ лежит по ту же сторону относительно $BD$, что и $A$, то есть по разные стороны с точкой $C$, значит, четырехугольник $BHDC$ — вписанный.

**(c)** Верно ли, что центр вписанной окружности треугольника $BCD$ обязательно лежит на $\omega$?

**Ответ.** Да, верно. **Решение.** Обозначим указанную точку через $I$. По свойству точки пересечения биссектрис, угол $\angle BID = 90° + \frac{\angle BAD}{2}$ (это легко получается счетом углов). Значит, в нашем случае он равен $120°$, при этом точка $I$ лежит по ту же сторону относительно $BD$, что и $A$, то есть по разные стороны с точкой $C$, значит, четырехугольник $BHDC$ — вписанный.

**(d)** Верно ли, что центр описанной окружности треугольника $BCD$ обязательно лежит на $\omega$?

**Ответ.** Да, верно. **Решение.** Обозначим указанную точку через $O$, тогда $\angle BOD = 2\angle BAD = 120°$, как центральный. Точка $O$ лежит по ту же сторону относительно $BD$, что и $A$, то есть по разные стороны с точкой $C$, значит, четырехугольник $BHDC$ — вписанный.

**3.** Дан угол $\angle A = 60°$ и точка $P$ внутри него. Из точки $P$ опущены перпендикуляры $PB$ и $PC$ на стороны угла.

**(a)** Что больше: $AP$ или $BC$?

**(i)** $AP > BC$; **(ii)** $AP < BC$; **(iii)** $AP = BC$; **(iv)** невозможно определить однозначно; **(v)** не знаю.

**Ответ.** $AP > BC$. **Решение.** $AP$ является диаметром описанной окружности четырехугольника $ABPC$, $BC$ — его хорда, отличная от диаметра, поэтому $AP > BC$.

**(b)** Что больше: $AP$ или $AB + BC$?

**(i)** $AP > AB+BC$; **(ii)** $AP < AB+BC$; **(iii)** $AP = AB+BC$;**(iv)** невозможно определить однозначно; **(v)** не знаю.

**Ответ.** $AP < AB+BC$. **Решение.** $BC > BP$, так как в треугольнике $BPC$ напротив большего угла $BPC = 120°$ лежит большая сторона. Значит, $AB+BC > AB+BP > AP$ (последнее выполнено по неравенству треугольника для $ABP$).

**(c)** Что больше: $BC$ или $AB + BP$?

**(i)** $BC > AB+BP$; **(ii)** $BC < AB+BP$; **(iii)** $BC = AB+BP$; **(iv)** невозможно определить однозначно; **(v)** не знаю.

**Ответ.** $BC < AB + BP$. **Решение.** По пункту **(a)**, $BC < AP < AB + BP$ (последнее выполнено по неравенству треугольника для $ABP$).

**(d)** Что больше: $AP$ или $BP + PC$?

**(i)** $AP > BP + PC$; **(ii)** $AP < BP + PC$; **(iii)** $AP = BP + PC$; **(iv)** невозможно определить однозначно; **(v)** не знаю.

**Ответ.** Невозможно определить однозначно. **Решение.** Повернем треугольник $APC$ на $60°$ вокруг точки $A$ так, чтобы лучи $AC'$ и $AB$ совпали (через $C'$ и $P'$ мы обозначим образы точек $C$ и $P$ при указанном повороте). Тогда $AC'P$ — равносторонний треугольник, значит, $AP = C'P$. В силу построения $C'P' = CP$. Поэтому если $P'$ и $B$ не совпали, то $BP + PC = BP + C'P' < C'P = AP$. Но если $P'$ и $B$ совпадут, то в указанном выражении достигается равенство, значит, однозначно определить, что больше, нельзя.

**4.** Дан остроугольный треугольник $ABC$.

**(a)** В нем отметили точку $O$ — центр описанной окружности. Пусть $AO$ пересекает отрезок $BC$ в точке $P$, $BO$ пересекает $AC$ в точке $Q$, $CO$ пересекает $AB$ в точке $R$. Оказалось, что $AP = BQ = CR$. Обязательно ли треугольник $ABC$ — равносторонний?

**Ответ.** Да. **Решение.** Так как $O$ — центр описанной окружности, то $OA = OB = OC$ и $OP = OQ = OR$. Тогда треугольники $BRO$ и $CQO$ равны по вертикальным углам $\angle BOR = \angle COQ$ и прилежащим сторонам $BO = OC$, $OR = OQ$. Поэтому $\angle RBQ = \angle RCQ$, то есть четырехугольник $RBCQ$ —вписанный. Так как $RC = BQ$ и треугольник $ABC$ —остроугольный, то $\angle RBC = \angle QCB$. То есть мы доказали, что углы $\angle B$ и $\angle C$ исходного треугольника $ABC$ равны. Аналогично доказывается равенство всех углов.

**(b)** В нем провели высоты $AX$ и $BY$ и оказалось, что $2XY = AB$. Обязательно ли треугольник $ABC$ обязательно равносторонний?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Докажем, что $2XY = AB$ в любом треугольнике $ABC$ с $\angle C = 60°$, так как среди них есть неравносторонние, то тем самым мы докажем, что утверждение неверно.

Заметим, что в прямоугольном треугольнике $CYB$ $\angle YCB = 60°$, поэтому $CB = 2CY$. Аналогично $CA = 2CX$. Тогда треугольники $CAB$ и $CXY$ подобны с коэффициентом 2. Значит, $2XY = AB$, что мы и хотели доказать.

**(c)** В нем провели биссектрисы $AK$ и $BN$. Оказалось, что $2KN = AB$. Верно ли, что треугольник $ABC$ обязательно равносторонний?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Покажем пример треугольника, в котором выполнено $2KN = AB$, но он не является равносторонним. Проведем отрезок $AB$ и выберем точку $C$ так, чтобы $\angle CAB = 90° - \varepsilon$, а $\angle ABC = 2\varepsilon$ при $\varepsilon < 1°$. Тогда отрезок $KN$ может быть сколь угодно мал по сравнению с $AB$, то есть $2KN < AB$. Теперь начнем сдвигать точку $B$ к точке $A$ до тех пор, пока треугольник $ABC$ не станет равнобедренным, $AC = CB$. В таком положении отношение длины отрезка $KN$ к $AB$ при достаточно малом $\varepsilon$ может быть сколь угодно близко к 1, поэтому $2KN > AB$. Значит, в какой-то момент выполнялось равенство $2KN = AB$, при этом треугольник не был равносторонним, так как не менялся угол $\angle CAB = 90^\circ - \varepsilon$.

**(d)** В нем отметили точку $S$. Прямая $AS$ пересекает отрезок $BC$ в точке $V$, прямая $BS$ пересекает отрезок $AC$ в точке $U$, прямая $CS$ пересекает отрезок $AB$ в точке $W$. Оказалось, что $2UV = AB$, $2VW = AC$, $2UW = BC$. Обязательно ли треугольник $ABC$ равносторонний?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Достаточно в качестве точки $S$ выбрать точку пересечения медиан неравностороннего треугольника $ABC$, для нее будет выполнено условие.

**5.** Дан прямоугольник $ABCD$. Сторона $AB = 12$, а $AD = 40$. Пусть $M$ — середина $AD$, а точка $P$, лежащая на стороне $BC$ ближе к точке $B$, чем к $C$, такова, что $\angle APD = 90^\circ$.

**(a)** Чему равно отношение $BP : PC$?

**(i)** $3 : 10$; **(ii)** $1 : 5$; **(iii)** $1 : 10$; **(iv)** $1 : 9$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $1 : 9$. **Решение.** Заметим, что точка $P$ — точка пересечения окружности $\omega$ с центром в $M$ и радиуса $MA$ с отрезком $AB$, лежащая ближе к $B$. Тогда напишем степень точки $B$ относительно этой окружности. С одной стороны, она равна квадрату касательной $AB^2 = 12^2 = 144$. С другой стороны, если вторую точку пересечения окружности $\omega$ с $BC$ обозначить через $Q$, то эта же степень равна $BP \cdot BQ$. В силу симметрии картинки относительно серединного перпендикуляра к отрезку $AD$, то, обозначив $BP = x$, имеем $BP \cdot BQ = x(40 - x) = 144$. У этого уравнения два решения, $x = 4$ и $x = 36$. Но второе решение соответствует не точке $P$, а точке $Q$, поэтому $BP = 4$, а $BP : PC = 1 : 9$.

**Комментарий.** Так как изначально в условии не было указано, что точка $P$ расположена к $B$ ближе, чем к $C$, то в этом пункте также засчитывался ответ «невозможно определить однозначно».

**(b)** Пусть $MP$ пересекает прямую $AB$ в точке $K$. Чему равно $KP$?

**(i)** 5; **(ii)** 4; **(iii)** $2\sqrt{3}$; **(iv)** $3\sqrt{2}$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** 5. **Решение.** Треугольники $KBP$ и $KAM$ подобны с коэффициентом $AM/BP = 5$. Поэтому $KB : KA = 1 : 5$, и $KB = 3$. Значит, по теореме Пифагора для прямоугольного треугольника $KBP$ $KP^2 = BP^2 + BK^2 = 3^2 + 4^2 = 5^2$, следовательно $KP = 5$.

**Комментарий.** Так как изначально в условии не было указано, что точка $P$ расположена к $B$ ближе, чем к $C$, то в этом пункте также засчитывался ответ «невозможно определить однозначно».

**(c)** В треугольнике $AKM$ опустили высоту $AH$ на $KM$. Чему равна длина этой высоты?

**(i)** 15; **(ii)** $6\sqrt{3}$; **(iii)** 12; **(iv)** $10\sqrt{2}$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** 12. **Решение.** По теореме Пифагора для треугольника $AKM$ имеем $KM = 25$. Заметим, что треугольник $AKH$ подобен треугольнику $MKA$ с коэффициентом $k = AK/KM = 3/5$. Тогда $AH = AM \cdot \frac{3}{5} = 12$.

**Комментарий.** В этом пункте ответ 12 получается в том числе и в случае, когда точка $P$ лежит ближе к $C$. Поэтому ответ «невозможно определить однозначно» здесь **не** засчитывается.

(**d**) Чему равен угол между $BH$ и $AP$?

(**i**) 60°; (**ii**) 90°; (**iii**) $\arcsin \frac{4}{5}$; (**iv**) 72°; (**v**) невозможно определить однозначно; (**vi**) среди приведенных ответов нет правильного; (**vii**) не знаю.

**Ответ.** 90°. **Решение.** Прямоугольные треугольники $ABP$ и $AHP$ равны по общей гипотенузе и равным катетам $AB = AH$. Значит, $ABPH$ — дельтоид, поэтому $AP \perp BH$.

**Комментарий.** В этом пункте ответ 90° получается в том числе и в случае, когда точка $P$ лежит ближе к $C$. Поэтому ответ «невозможно определить однозначно» здесь **не** засчитывается.

**6.** В треугольнике $ABC$ $\angle A = 80°$, $\angle B = 70°$, $\angle C = 30°$. Пусть $I$ — центр вписанной окружности. Биссектрисы углов $A$, $B$ и $C$ пересекают описанную окружность в точках $X$, $Y$ и $Z$.

(**a**) Чему равен угол $\angle XYZ$?

(**i**) 45°; (**ii**) 50°; (**iii**) 55°; (**iv**) 60°; (**v**) невозможно определить однозначно; (**vi**) среди приведенных ответов нет правильного; (**vii**) не знаю.

**Ответ.** 55°. **Решение.** Указанный угол равен полусумме меньших дуг $BX$ и $BZ$. На них опираются углы $\angle BAX$ и $\angle BCZ$, сумма которых равна 55°.

(**b**) Чему равен угол $BIC$?

(**i**) 120°; (**ii**) 130°; (**iii**) 140°; (**iv**) 150°; (**v**) невозможно определить однозначно; (**vi**) среди приведенных ответов нет правильного; (**vii**) не знаю.

**Ответ.** 130°. **Решение.** Счетом углов получается формула $\angle BIC = 90° + \frac{\angle BAC}{2}$, то есть искомый угол равен 130°.

(**c**) Чему равен угол между $AB$ и $XZ$?

(**i**) 20°; (**ii**) 25°; (**iii**) 30°; (**iv**) 40°; (**v**) невозможно определить однозначно; (**vi**) среди приведенных ответов нет правильного; (**vii**) не знаю.

**Ответ.** Среди приведенных ответов нет правильного. **Решение.** Угол между указанными хордами равен полусумме меньших дуг $BX$ и $AZ$, градусные меры которых равны 80° и 30° соответственно. Поэтому искомый угол равен 55°.

(**d**) Чему равен угол между $BY$ и $XZ$?

(**i**) 90°; (**ii**) 60°; (**iii**) 80°; (**iv**) 45°; (**v**) невозможно определить однозначно; (**vi**) среди приведенных ответов нет правильного; (**vii**) не знаю.

**Ответ.** 90°. **Решение.** Обозначим точки пересечения $ZX$ с $AB$ и $BC$ через $P$ и $Q$ соответственно. Тогда $\angle BPQ$ равен полусумме меньших дуг $BX$ и $AZ$, а $\angle BQP$ равен полусумме меньших дуг $XC$ и $BZ$. Но эти дуги соответственно равны, значит, треугольник $BPQ$ равнобедренный, $BY$ в нем является биссектрисой, а значит и высотой, поэтому $BY \perp XZ$.

**7.** Верно ли, что трапеция $ABCD$ ($BC \parallel AD$) задана однозначно, если известны

**(a)** длины обоих оснований и обеих боковых сторон?

**Ответ.** Да. **Решение.** Пусть, не умаляя общности, $BC > AD$. Сначала нарисуем треугольник $ABC'$ в котором $AC' = DC$ и $BC' = BC - AD$. Этот треугольник восстанавливается однозначно. Тогда высота этого треугольника, проведенная из $A$, равна высоте трапеции, а значит однозначно восстанавливается прямая $AD$. Кроме того, точка $C$ восстановится однозначно, а вместе с ней и точка $D$ как одна из двух точек пересечения окружности с центром в $C$ и радиуса $CD$ с прямой $AD$ (та из двух, для которой $AD$ получается равным заданному значению).

**(b)** высота трапеции и длины обоих оснований?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Зададим две параллельные прямые на расстоянии высоты трапеции. Тогда в качестве искомой трапеции подойдет любая, основания которой лежат на этих двух прямых. Среди таких трапеций найдутся не равные.

**(c)** все 4 угла и длины обеих диагоналей?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Рассмотрим остроугольный равнобедренный треугольник $PBC$ ($PB = PC$). Проведем в нем высоты $BX$ и $CY$. Выберем в качестве длины диагонали $d$ отрезок, чуть превосходящий длину высоты $BX = CY$. Тогда при пересечении окружности с центром в $C$ и радиуса $d$ с прямой $PB$ получим две точки $A$ и $A'$, лежащие на отрезке $PB$. Аналогично получим точки $D$ и $D'$ (выберем их так, что $AD \parallel A'D' \parallel BC$). Тогда в трапециях $ABCD$ и $A'BCD'$ равны все углы и длины обеих диагоналей, при этом сами трапеции не равны.

**(d)** длины перпендикуляров из всех 4 вершин на противоположные боковые стороны?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Обозначим точку пересечения $AB$ и $CD$ через $P$. Тогда треугольники $PBC$ и $PAD$ подобны, поэтому длины перпендикуляров из вершин одной стороны к другой стороне должны относиться одинаково. Пусть длины перпендикуляров из $B$ и $C$ равны 1, длины перпендикуляров из $A$ и $D$ равны 2, а $BC = 1{,}5$. Тогда треугольник $PBC$ восстанавливается, после этого, сделав гомотетию с центром в $P$ и коэффициентом 2 и обозначив образы точек $B$ и $C$ через $A$ и $D$, получим треугольник $PAD$, в котором высоты равны 2. Трапеция $ABCD$ удовлетворяет условию. Если же теперь взять $BC = 1{,}6$, то снова получим трапецию, удовлетворяющую условию, но она, очевидно, не равена первой трапеции.

**8.** Дан выпуклый шестиугольник $ABCDEF$. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины его сторон $AB, BC, \ldots, FA$.

**(a)** Верно ли, что из векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BE}$, $\overrightarrow{CF}$ всегда можно составить треугольник?

**Ответ.** Нет. **Решение.** Достаточно рассмотреть шестиугольник, симметричный относительно $AD$, в котором $AD = 100$, $BC = EF = BF = CE = 1$, тогда $BE = CF = \sqrt{2}$, и треугольник составить нельзя.

**(b)** Верно ли, что из векторов $\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_3M_4}, \overrightarrow{M_5M_6}$ всегда можно составить треугольник?

**Ответ.** Да. **Решение.** Достаточно показать, что сумма указанных векторов равна $\overrightarrow{0}$. Это верно, потому что $\overrightarrow{M_1M_2}+\overrightarrow{M_3M_4}+\overrightarrow{M_5M_6} = \frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}}{2}+\frac{\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}}{2} = \overrightarrow{0}$.

**(c)** Верно ли, что из векторов $\overrightarrow{M_1M_4}$, $\overrightarrow{M_3M_6}$ и $\overrightarrow{M_5M_2}$ всегда можно составить треугольник?

**Ответ.** Да. **Решение.** Также распишем сумму векторов через стороны шестиугольника: $\overrightarrow{M_1M_4} = \frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\frac{\overrightarrow{DE}}{2}$. Записав аналогичные равенства и сгруппировав, получим сумму векторов сторон шестиугольника $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}+\overrightarrow{FA}$ плюс половину той же суммы, итого $\overrightarrow{0}$.

**(d)** Верно ли, что из векторов $\overrightarrow{M_1M_3}$, $\overrightarrow{M_2M_4}$, $\overrightarrow{M_3M_5}$, $\overrightarrow{M_4M_6}$, $\overrightarrow{M_5M_1}$, $\overrightarrow{M_6M_2}$ можно составить шестиугольник?

**Ответ.** Да. **Решение.** Во-первых, аналогично предыдущим двум пунктам проверяется, что сумма указанных векторов равна $\overrightarrow{0}$. Во-вторых, чтобы получить несамопересекающуюся фигуру, проведем все указанные векторы из одной точки, пронумеруем по часовой стрелке и далее будем проводить векторы в порядке нумерации. В итоге получим шестиугольник.

**9.** Вокруг окружности с центром $I$ радиуса 1 описали пятиугольник $ABCDE$. Оказалось, что $\angle EAB = \angle EIA = 90^\circ$, а треугольник $DIC$ — равносторонний.

**(a)** Чему равен отрезок $EA$?

**(i)** 1; **(ii)** 2; **(iii)** $\sqrt{2}$; **(iv)** $\sqrt{3}$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** 2. **Решение.** Обозначим точки касания вписанной окружности со сторонами $AB$, $BC$, $CD$, $DE$, $EA$ через $X$, $Y$, $Z$, $T$, $P$ соответственно. Тогда $APIX$ — квадрат (так как $\angle PAX = 90^\circ$, $AP = AX$, а также $\angle IPA = \angle AXI = 90^\circ$). Так как $\angle EIA = 90^\circ$, то $\angle PIE = 45^\circ$, значит, треугольник $EPI$ — равнобедренный прямоугольный, $EP = PI = 1$, то есть $EA = 1$.

**(b)** Чему равен отрезок $ED$?

**(i)** 1; **(ii)** 1,5; **(iii)** 2; **(iv)** $\sqrt{3}$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** Среди приведенных ответов нет правильного. **Решение.** Заметим, что треугольники $TDI$ и $ZDI$ симметричны относительно $DI$, при этом $IDZ$ — половина равностороннего треугольника $IDC$. В нем $IZ = 1$, а $DZ = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Аналогично треугольники $EPI$ и $ETI$ симметричны относительно $EI$, поэтому $ET = EP$. Итого $ED = ET + TD = EP + DZ = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$, и такого ответа среди указанных нет.

**(c)** Чему равен угол $\angle CIB$?

**(i)** $45^\circ$; **(ii)** $60^\circ$; **(iii)** $90^\circ$; **(iv)** $120^\circ$; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $60^\circ$. **Решение.** Заметим, что из ранее доказанного следует, что $EPIT$ и $PIXA$ — два квадрата, поэтому $T$, $I$ и $X$ лежат на одной прямой. При этом $\angle DIT =$

$\angle DIZ = \angle CIZ = \angle CIY = 30°$. В свою очередь, $\angle BIY = \angle BIX$, в силу симметрии относительно $BI$, значит, каждый из них также равен по $30°$, а $\angle CIB = \angle CIY + \angle YIB = 60°$.

**(d)** Чему равна площадь пятиугольника $ABCDE$?

**(i)** $2+\sqrt{3}$; **(ii)** 4; **(iii)** $3\sqrt{2}$; **(iv)** 2,5; **(v)** невозможно определить однозначно; **(vi)** среди приведенных ответов нет правильного; **(vii)** не знаю.

**Ответ.** $2+\sqrt{3}$. **Решение.** Из ранее доказанного следует, что $EA = 2$, $ET = AX = 1$, $TD = DZ = ZC = CY = YB = BX = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Искомую площадь получим, сложив все указанные отрезки, умножив на радиус вписанной окружности и поделив на 2, откуда и ответ.

**10.** Какие из следующих утверждений верны?

**(a)** Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух прямых, является прямая.

**Ответ.** Нет. **Решение.** Например, если две прямые пересекаются, то искомым ГМТ является пара биссектрис угла, то есть пара прямых.

**(b)** Геометрическим местом середин хорд данной окружности является окружность.

**Ответ.** Нет. **Решение.** Указанным ГМТ является не окружность, а круг.

**(c)** Геометрическим местом точек, из которых два данных отрезка видны под одинаковыми углами, является прямая.

**Ответ.** Нет. Рассмотрим два неравных отрезка $AB \parallel CD$. Тогда точка пересечения диагоналей трапеции $ABCD$ и точка пересечения боковых стороно подходят под условие, но не все точки на прямой, их соединяющей, подходят, значит, указанное ГМТ не может являться прямой.

**(d)** Пусть прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $O$. Тогда геометрическим местом точек $P$ таких, что сумма длин проекций отрезка $OP$ на прямые $a$ и $b$ постоянна, является параллелограмм.

**Ответ.** Да. **Решение.** Найдем по точке, удовлетворяющей условию, на каждом из 4 лучей, на которые точка $O$ делит прямые $a$ и $b$. Обозначим эти точки через $A$, $B$, $C$ и $D$. Заметим, что $ABCD$ — прямоугольник, так как $OA = OB = OC = OD$. Рассмотрим теперь угол $\angle AOB$. В нем точки отрезка $AB$ удовлетворяют условию, а остальные точки условию не удовлетворяют. Значит, искомым ГМТ является прямоугольник $ABCD$, который, в свою очередь, является параллелограммом, и утверждение задачи верно.