<u>Решите задачи.</u>

1) **Условие: «Последняя планета»** Планета Нептун излучает больше энергии чем получает от Солнца. Возможное объяснение этого — образование кристаллов алмазов из метана на глубине 7000 км, которые падают на ядро Нептуна. Предполагая, что ***вся избыточная*** энергия производится ***только за счет падения*** алмазов (пренебрегая теплотой, выделяемой или поглощаемой при химической реакции разложения метана и другими возможными источниками энергии), оцените массу алмазов, образующихся в Нептуне в течение одного земного года.

Решение:

<table>
<tr><td>Тепло образуется за счет энергии, выделяемой при трении кристаллов о среду, в которой они движутся, а также небольшое количество энергии выделяется при остановке в конце падения. Однако при переходе энергии в тепло должен выполняться закон сохранения энергии. При образовании кристаллов, они имеют практически нулевую скорость и не движутся после падения на дно, тогда закон сохранения энергии для одного кристалла можно записать в виде:
$e_{\text{p1}} = e_{p2} + q$
где e_{p1} — потенциальная энергия кристалла в точке, где он образовался,
e_{p2} — потенциальная энергия кристалла в точке, где он остановился,
q — теплота, выделившаяся во время движения и остановки кристалла.</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>Так как процесс происходит уже в течение очень долгого времени, неважно какое время требуется для падения конкретного кристалла, в среднем на ядро будет падать за некоторый промежуток времени столько же кристаллов, сколько образуется за это же время в слое разложения метана. (Так как в противном случае кристаллы собирались бы на некоторой глубине и за долгое время образовали бы непроницаемую оболочку, которую внешний наблюдатель и воспринимал бы как ядро.)
Теплота, выделяемая в течение какого-то времени за счет трения на некоторой глубине, равна теплоте, выделенной в этом слое за предыдущий такой же промежуток времени. Таким образом теплота, выделенная за некоторый промежуток времени в двух соседних слоях равна теплоте, выделенной за вдвое больший промежуток времени всеми кристаллами, находившимися только в более высоком слое. Это же верно для любого числа слоев, тогда вместо разбиения по слоям можно рассмотреть все кристаллы, образовавшиеся за данный промежуток времени и расчитать теплоту, выделяемую ими при падении, вне зависимости от того сколько времени занимает падение. Тогда в среднем можно для любого достаточно длинного промежутка времени записать:
$E_{\text{p1}} = E_{\text{p2}} + Q$
где E_p — суммарные потенциальные энергии кристаллов, образовавшихся в течение данного промежутка времени, Q — теплота, выделенная этими кристаллами при падении.</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>$Q = E_{p2} - E_{\text{p1}}$
$E_{\text{p1}} = -G\dfrac{M_1 m}{R_1}$</td><td>2 б</td></tr>
</table>

$E_{p2} = -G\dfrac{M_2 m}{R_2}$ где G — гравитационная постоянная, m — масса образовавшихся алмазов, M_1 — масса планеты внутри слоя разложения метана, $R_1 = 24600 - 7000 = 17600$ км — радиус данного слоя, M_2 — масса планеты внутри слоя, на котором останавливается падение кристаллов, $R_2 = 5000$ км — радиус данного слоя. Массу планеты, ограниченную слоем радиуса *R*, можно оценить, используя среднюю плотность планеты ρ $M = \dfrac{4}{3}\pi R^3 \rho \quad \Rightarrow \dfrac{M}{R} = \dfrac{4}{3}\pi R^2 \rho$	
Тогда $Q = Gm\dfrac{4}{3}\pi\rho\left(R_1^2 - R_2^2\right)$ $m = \dfrac{3}{4}\dfrac{Q}{G\pi\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$	**1 б**
Дополнительная энергия, излучаемая за единицу времени всей поверхностью Нептуна p_0 $p_0 = (\sigma_N - \sigma_S)4\pi R_0^2$ где σ_N — средняя энергия, излучаемая единичной поверхностью Нептуна за единицу времени, σ_S — средняя энергия, получаемая единичной поверхностью планеты от Солнца, R_0 — радиус Нептуна.	**1 б**
За год Нептун изучает $Q = p_0 t_{365}$ где $t_{365} = 365 \cdot 24 \cdot 3600 = 31536000$ с — продолжительность года в секундах. $m = \dfrac{3}{4}\dfrac{(\sigma_N - \sigma_S)4\pi R_0^2 t}{G\pi\pi\left(R_1^2 - R_2^2\right)} = 3\dfrac{(\sigma_N - \sigma_S)R_0^2 t}{G\rho\left(R_1^2 - R_2^2\right)}$ $m = 3\dfrac{(0{,}687 - 0{,}254)\cdot 24600^2 \cdot 31536000}{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1638 \cdot \left(17600^2 - 5000^2\right)} \approx 8 \cdot 10^{14}$ кг	
Ответ: $8 \cdot 10^{14}$ кг.	**1 б**

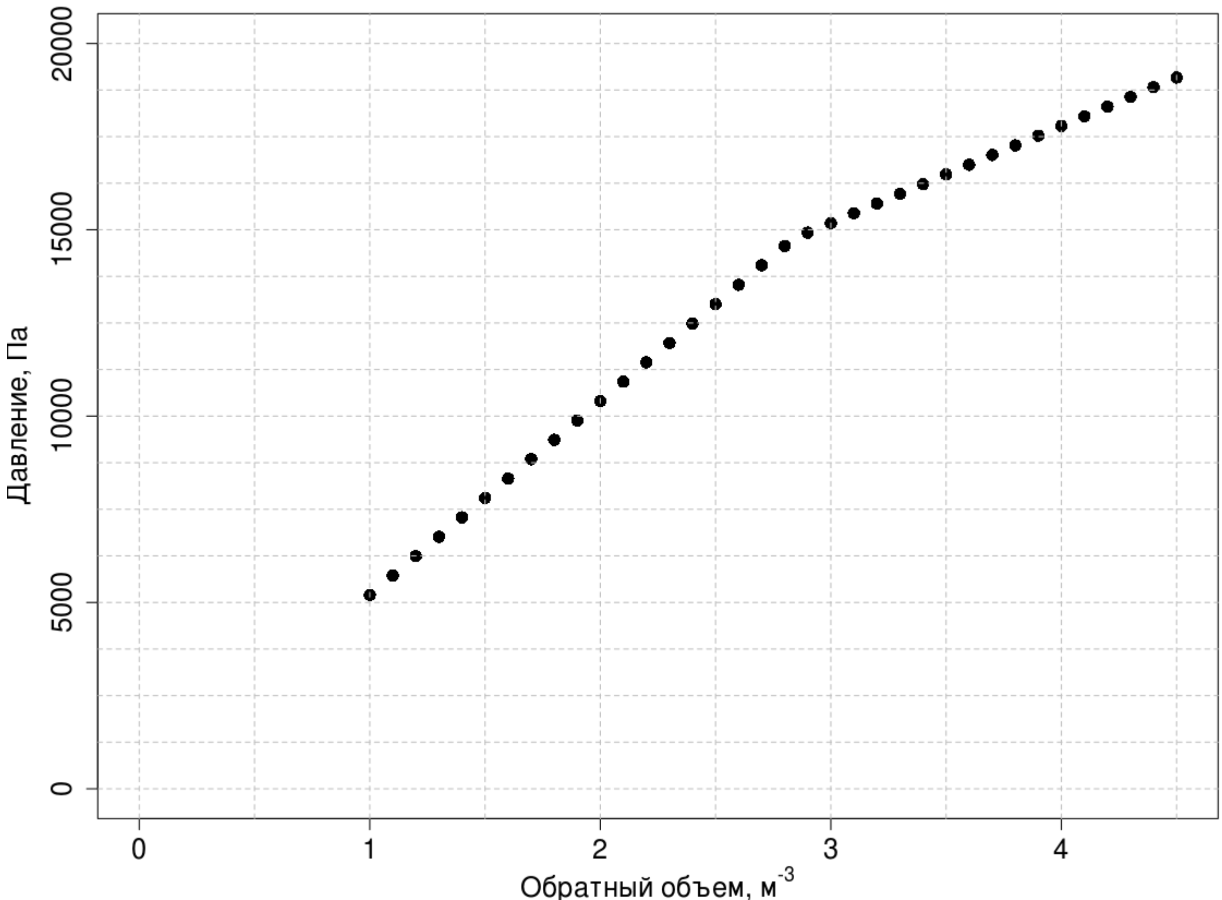
2) **Условие: «5 граней. V2»**Из очень тонкого материала сделан куб без одной грани. Масса куба 800 г, а длина ребра 10 см. Куб аккуратно опустили в пресную воду дном вверх, и он остался плавать, не касаясь дна и стенок сосуда, так, что его дно все время остается горизонтальным. На сколько миллиметров выше уровня воды находится дно куба? Температура воды и окружающего воздуха 4 °С, испарением воды можно пренебречь, а все процессы протекают изотермически. Также можно пренебречь колебаниями поверхности воды и капилярными эффектами.

Решение:

Внутри куба вода не сможет подняться до того же уровня, что и снаружи из-за воздуха внутри куба. Пусть длина ребра куба *l*, высота дна куба над уровнем воды в сосуде *d*, а глубина, на которой находится уровень воды внутри сосуда — *h*. Давление внутри сосуда p_1 равно давлению воды на глубине *h*: $p_0 + \rho g h = p_1$ где p_0 — давление воздуха (равное нормальному атмосферному давлению, так	**1 б**

как по условию испарением можно пренебречь, следовательно пары воды не дают вклад в давление), ρ — плотность воды при 4 °C.	
С другой стороны, при погружении куба в воду объем воздуха уменьшается (по условию изотермически, т. е. давление при этом растет), и начальное давление воздуха внутри куба, равное нормальному атмосферному давлению, и конечное давление в кубе связаны соотношением $p_0 l^3 = p_1 l^2 (d+h)$ $p_0 l = p_1 (d+h)$ $p_0 l = (p_0 + \rho g h)\cdot(d+h)$	**1 б**
Уровень воды внутри куба влияет на выталкивающую силу, действующую на куб: $\rho g h l^2 = mg \quad \Rightarrow \quad \rho g h = \frac{mg}{l^2} \quad \Rightarrow \quad h = \frac{m}{\rho l^2}$ где hl^2 — объем погруженной части, m — масса куба.	**1 б**
$p_0 l = \left(p_0 + \frac{mg}{l^2}\right)\cdot\left(d + \frac{m}{\rho l^2}\right)$ $d = \frac{p_0 l}{\left(p_0 + \frac{mg}{l^2}\right)} - \frac{m}{\rho l^2}$ $d = \frac{101325\cdot 0{,}1}{\left(101325 + \frac{0{,}8\cdot 9{,}81}{0{,}1^2}\right)} - \frac{0{,}8}{1000\cdot 0{,}1^2} \approx 0{,}01923\text{м} \approx 19{,}2\text{м}$	?1 б?
Ответ: 19,2 мм.	**1 б**

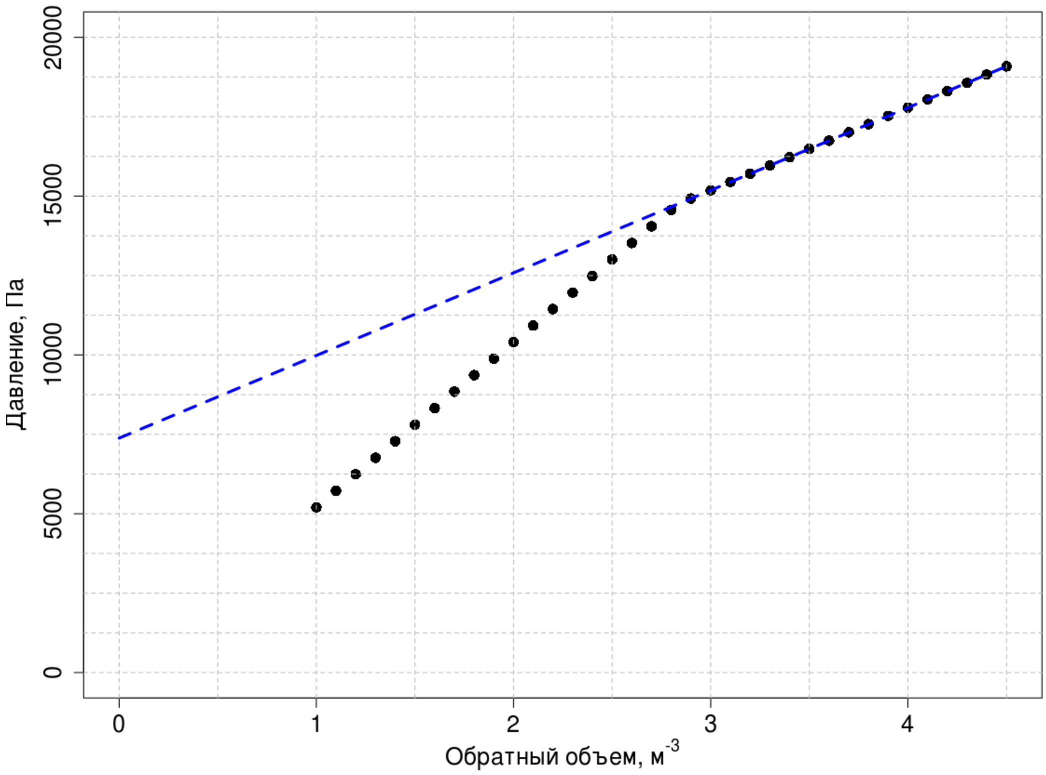
3) Условие: «Влажный воздух» В герметичном сосуде находится влажный воздух. На рисунке ниже (~~см. следующую страницу~~) приведена изотерма данной смеси. Оцените



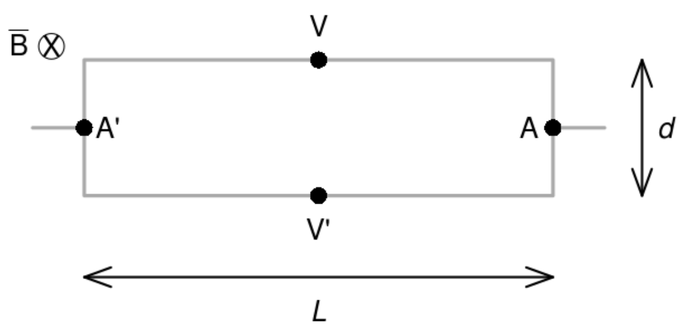
температуру, при которой проводились измерения, а также установите является ли пар насыщенным, когда смесь занимает объем 0,25 м^3 и 0,5 м^3. При решении задачи можно считать, что водяной пар является идеальным газом вплоть до момента конденсации, а объем воды, образующейся при конденсации, пренебрежимо мал по сравнению с объемом сосуда.

Решение:

Давление в сосуде, *p*, складывется из парциальных давлений сухого воздуха, $p_в$, и водяного пара, $p_п$: $p = p_п + p_в$	**1 б**
Если водяной пар не конденсируется, оба газа можно считать идеальными. (На приведенном графике давление намного меньше нормального атмосферного давления, поэтому воздух можно считать идеальным газом, а водяной пар можно считать идеальным газом по условию). Для $\nu_в$ молей сухого воздуха и $\nu_п$ молей водяного пара парциальные давления при температуре *T*, равны соответственно: $p_в = \dfrac{\nu_в RT}{V}$ и $p_п = \dfrac{\nu_п RT}{V}$ где *V* — объем сосуда.	**1 б**
И полное давление в сосуде равно $p = p_в + p_п = \dfrac{\nu_в RT}{V} + \dfrac{\nu_п RT}{V}$ $p = \dfrac{\nu_в RT + \nu_п RT}{V} = C_1 \dfrac{1}{V}$ (3*) где $C_1 = (\nu_в + \nu_п)RT$ — коэффициент, не меняющийся при постоянной температуре и отсутствии конденсации пара. Если рассматривать данную формулу как зависимость давления от обратного объема, получится прямая, проходящая через начало координат, что соответствует поведению изотермы до излома при $1/V \approx 3$ м$^{-3}$. Таким образом изотерма левее точки излома соответствует изменению объема смеси без появления росы (т. е. без конденсации водяного пара).	**1 б**
Приведенные в условии объемы 0,5 м^3 и 0,25 м^3 соответствуют обратным объемам 2 м$^{-3}$ и 4 м$^{-3}$, т. о. объем *0,5 м^3* лежит в области, где пар не конденсируется и, следовательно, его парциальное давление меньше давления насыщенного пара и *пар не является насыщенным.*	**1 б**
Если парциальное давление пара достигает давления насыщенного пара, $p_{пк}$, расти выше оно не будет, вместо этого при уменьшении объема часть газа будет конденсироваться, а парциальное давление пара будет оставаться постоянным. В этом случае полное давление в сосуде равно $p = p_в + p_{пк} = \dfrac{\nu_в RT}{V} + p_{пк}$ $p = p_{пк} + \nu_в RT \dfrac{1}{V}$. (3**) В данном случае зависимость давления от обратного объема линейная как и в предыдущем случае, но данная прямая не проходит через начало координат.	**1 б**

Значение давления в пределе $\frac{1}{V} \to 0$ равно значению давления насыщенного пара при данной температуре. Изотерма, приведенная в условии, соответствует последней зависимости давления от обратного объема правее точки излома.	
Приведенные в условии объемы 0,5 м^3 и 0,25 м^3 соответствуют обратным объемам 2 м$^{-3}$ и 4 м$^{-3}$, т. о. объем *0,25 м^3* лежит в области, где давление пара равно давлению насыщенного пара, *следовательно,* относительная влажность при данном объеме 100%, т. е. *пар является насыщенным.*	**1 б**
 Линейную зависимость описывающую зависимость давления, можно продлить влево до нулевого значения обратного объема при помощи линейки. Продолжение линейной зависимости при низких объемах до значения $\frac{1}{V} = 0$ (что не имеет физического смысла, но позволяет формально оценить значение $p_{пк}$) дает давление насыщенного пара при данной температуре $p_{пк} \approx 7500$ Па.	**1 б**
По таблице «Давление насыщенных паров воды от 0 °С до 100 °С» можно оценить температуру при которой проводилось измерение. Наиболее близкое значение 7381,4 Па при температуре 40 °С. Т. о. *температура составила около 40 °С.*	**1 б**
Ответ: температура 40 °С, при объеме 0,5 м^3 пар ненасыщенный, при объеме 0,25 м^3 пар насыщенный.	**1 б**

4) **Условие: «Эффект Холла»** По медной пластине параллельно самой длинной ее стороне (от стороны A' к A, см. рисунок справа) течет



электрический ток I = 1 А. В точках V и V' (симметричных относительно прямой АА') подключен сверхточный идеальный вольтметр. Оцените показания вольтметра при помещении пластины в постоянное магнитное поле с индукцией 0,1 Тл (магнитное поле перпендикулярно пластине). При решении можно считать, что магнитное поле не влияет на точность показаний вольтметра, а также, что тепловыми и иными эффектами, кроме непосредственного влияния магнитного поля, можно пренебречь, также при решении можно считать, что концентрация электронов, обеспечивающих проводимость, равна концентрации атомов в пластине. Размеры пластины: длина L = 2 м, ширина d = 5 см, толщина h = 1 мм.

Решение :

Рассмотрим движение отдельного электрона внутри металла. При помещении металла в магнитное поле на электрон действует сила Лоренца $F_Л$ $F_Л = eBv$ где e — заряд электрона, v — скорость движения электрона (в данном случае предполагается, что скорость вдоль самой узкой стороны пластины пренебрежимо мала).	**1 б**
Сила Лоренца заставляет электроны отклоняться в направлении, перпендикулярном направлению тока. Однако, это приводит к появлению нескопенсированных положительного и отрицательного заряда на противоположных сторонах пластины, которые создают электрическое поле, замедляющее электроны. Сила, действующая на электроны со стороны дополнительного поля $F = eE$ где E — напряженность дополнительного электрического поля.	**1 б**
Отклонение электронов прекратится, когда обе силы сравняются по величине $F_Л = F$ $eBv = eE \quad \Rightarrow \quad E = Bv$	**1 б**
Напряженность постоянного электрического поля связана с разностью потенциалов $\Delta\varphi$ (и, следовательно, напряжением U) простым соотношением $U = \lvert\Delta\varphi\rvert = Ed \quad \Rightarrow \quad U = Bvd$	**1 б**
Скорости электронов в проводнике различны, но для оценки можно взять среднюю скорость движения электронов, вызванного электрическим током. Рассмотрим некоторое сечение пластины плоскостью, перпендикулярной направлению тока. За небольшое время Δt через это сечение пройдут электроны, находящиеся ближе чем $\Delta l = v\Delta t$ от плоскости. Число таких электронов ΔN зависит от их концентрации n: $\Delta N = n\Delta V = nS\Delta l$ где S — площадь сечения пластины. Тогда за время Δt через выбранное сечение протечет заряд $\Delta q = e\Delta N = enS\Delta l$ $\Delta q = ensv\Delta t$ По определению сила тока $I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t}$. Следовательно $I = enSv \quad \Rightarrow \quad v = \dfrac{I}{enS}$ где $S = dh$.	**2 б**

$U = Ed = \dfrac{BId}{endh} = \dfrac{BI}{enh}$ n найти через молярную массу и плотность	
Для нахождения концентрации электронов, вычислим концентрацию атомов кристаллической решетки (так как по условию эти величины равны). Один моль вещества сосотит из N_A атомов, которые занимают объем $V = \dfrac{M}{\rho}$ где M — молярная масса вещества, а ρ — его плотность. Тогда концентрация $n = \dfrac{N_A}{V} = \dfrac{N_A \rho}{M}$	**1 б**
Таким образом напряжение между точками V и V' равно $U = Bvd = Bd\,\dfrac{I}{endh} = \dfrac{BI}{enh} = \dfrac{BIM}{eN_A \rho h}$ $U = \dfrac{BIM}{eN_A \rho h} = \dfrac{0{,}1 \cdot 1 \cdot 0{,}06355}{1{,}602 \cdot 10^{-19} \cdot 6{,}02 \cdot 10^{23} \cdot 8920 \cdot 0{,}001} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-9} \quad В$	**1 б**
Ответ: $U = \dfrac{BIM}{eN_A \rho h} \approx 7{,}4 \cdot 10^{-9} \quad В$	**1 б**
Комментарий: Данная задача, по сути, является простейшим объяснением классического эффекта Холла — появление в магнитном поле разности потенциалов в проводнике в направлении, перпендикулярном току - открытого Эдвином Холлом (Edwin Herbert Hall) в 1879 году. Это и дало название задаче, однако, в листе заданий название было составлено из первых букв английского названия данного эффекта (Hall effect).	

5) **Условие: «Предохранитель»** Медный предохранитель установлен на приборе, который находится в комнате с темпераутрой 20 °C. При постоянном токе в 1 А при таких условиях предохранитель нагревается до 50 °C. При какой силе тока предохранитель перегорит? При решении задачи можно считать, что мощность теплообмена (количество энергии, передаваемое от одного тела другому за 1 с) пропорциональна разности температур, а зависимостью сопротивления от температуры и испарением предохранителя при нагревании можно пренебречь.

Решение:

Предохранитель нагревается за счет теплового действия тока. Одновременно он такую же энергию отдает воздуху в комнате (так как в противном случае он должен либо остывать, либо нагреваться, и его температура не будет постоянной). За некоторое время $\Delta\tau$ из-за теплового действия тока предохранитель получит теплоту $Q_n = \dfrac{I^2}{R}\Delta\tau$ и отдаст теплоту $Q_n = \alpha(t_{пр} - t_к)\Delta\tau$ где I — сила тока, R — сопротивление предохранителя, α — некоторый коэффициент (так как мощность теплообмена пропорциональна разности температур), $t_{пр}$ — температура предохранителя, $t_к$ — температура воздуха.	**1 б**

Приравняв обе теплоты, можно найти произведение двух неизвестных величин: сопротивления резистора R и коэффициента пропорциональности α. $\frac{I^2}{R}\Delta\tau = \alpha(t_{\text{пр}} - t_\kappa)\Delta\tau$ $\alpha R = \frac{t_{\text{пр}} - t_\kappa}{I^2}$ (5*)	**1 б**
Данное равенство останется верным при любом значении силы тока и температуры предохранителя (по крайней мере до тех пор пока предохранитель не перегорит). Максимальная температура до которой может нагреться предохранитель — температура плавления меди. Из таблицы в конце списка задач можно узнать, что это t = 1083 °C.	**1 б**
Если сила тока больше той, при которой предохранитель нагревается до температуры плавления меди t = 1083 °C, предохранитель будет получать больше энергии, а его температура не будет повышаться из-за плавления, и в конце концов он расплавится полностью. Для этой силы тока можно также записать $\alpha R = \frac{t - t_\kappa}{I_{\max}^2}$ (5**)	**1 б**
Приравняв (5*) и (5**), получим $\frac{t_{\text{пр}} - t_\kappa}{I^2} = \frac{t - t_\kappa}{I_{\max}^2}$ $I_{\max}^2 = I^2 \frac{t - t_\kappa}{t_{\text{пр}} - t_\kappa}$ $I_{\max} = I\sqrt{\frac{t - t_\kappa}{t_{\text{пр}} - t_\kappa}}$ $I_{\max} = 1 \cdot \sqrt{\frac{1083 - 20}{50 - 20}} \approx 5{,}95 \quad A$	**1 б**
Ответ: 35,4 А.	**1 б**

<u>**Методический блок.**</u>

В предложенных текстах «решений» могут содержаться ошибки в рассуждениях или в вычислениях (как в «ответах», так и в «решениях»). Укажите все ошибки и, если «решение» не верно, то приведите верное решение.

6) **Условие: «Подводный мир»** Вокруг подводного рифа *Chee-Reef* живет высокоразвитая подводная цивилизация. Мастера этой цивилизации научились изготавливать линзы из пузырьков воздуха. Ученик мастера сделал на экзамене две простые линзы — двояковогнутую и двояковыпуклую (диаметр обеих линз 8 см) и экспериментально определил их фокусные расстояния — 10 см и 20 см соответственно. Вторым заданием экзамена для ученика был теоретический расчет размера светлого пятна на экране при следующих условиях: точечный источник света расположен на главной оптической оси собирающей линзы на расстоянии 20 см слева от нее, на расстоянии 20 см правее собирающей линзы расположена рассеивающая линза (при этом их главные оптические оси совпадают), а в 10 см правее рассеивающей линзы расположен экран. (Рассмотреть нужно только свет, прошедший через обе линзы).

Какой ответ получил ученик, если все сделал правильно и рассматривал линзы как тонкие, а экран параллелен линзам?

“Решение”. Двояковыпуклые линзы — собирающие, а двояковогнутые — рассеивающие, значит фокусное расстояние собирающей линзы — 20 см, а рассеивающей — 10 см. Поэтому получается, что тогда источник расположен прямо в фокусе собирающей линзы, а тогда после того как свет пройдет через нее он пойдет вдоль ее оси.

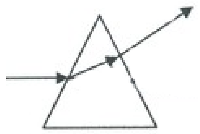
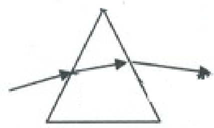
Значит не важно на каком расстоянии установлена вторая линза потому, что из-за того что свет прошедший через первую линзу попадет весь на вторую линзу.

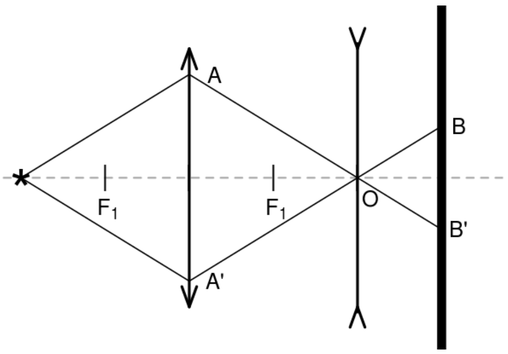
На вторую линзу свет падает вдоль оси линзы, а значит свет проходит через фокус.

Фокус второй линзы — 10 см и экран находится на расстоянии 10 см от нее. Получается, что в том случае когда свет соберется в фокусе он попадет на экран, а значит, что на экране получится просто святящаяся точка, то есть размер пятна практически 0. Ну, конечно, не совсем 0, потому что свет это волна, и мы знаем, что нельзя волну собрать в точку а можно только в кружок размером с волну, но нам не сказали какого цвета этот свет, поэтому не понятно какая у него длина волны и непонятно какой там получится размер пятнышка света, поэтому с учетом только того, что нам известно, что длина волны света окло 0,000000555 м (в воде чуть другая но почти такая же) то и пятно будет размером примерно 0,000000555 м. В таком ответе очень много нулей поэтому ответ все равно почти 0.

Ответ: 0 см.

Решение:

Самая очевидная ошибка в решении: автор решения забыл, что вторая линза не собирающая, а рассеивающа. Следовательно, пучок лучей, параллельный главной оптической оси, никак не может собраться в точку и дать действительное изображение. В фокусе рассеивающей линзы собираются не лучи, а их продолжения.	**1 б**
Вторая ошибка менее очевидная — неправильно указано какая линза будет собирающей, а какая рассеивающей, так как слова «двояковыпуклая» и «собирающая» - не синонимы (аналогично и «двояковогнутая» и «рассеивающая»). Действительно, обычно в задачах двояковыпуклые линзы являются рассеивающими, так как линза сделана из оптически более плотного вещества чем окружающая среда (см. пример с призмой на рисунке справа), в  случае пузырька воздуха в воде, окружающая среда будет оптически более плотной чем линза и двояковыпуклая поверхность будет отклонять луч от главной оптической оси, а не к ней (см. пример с призмой на рисунке слева). 	**2 б**
С учетом второго замечания к “решению”, приведенному выше, фокусное расстояние рассеивающей линзы равно 20 см, а собирающей — 10 см.	**1 б**
Расстояние от источника до собирающей линзы вдвое больше фокусного расстояния линзы, а предмет, расположенный на расстоянии, равном удвоенному фокусному расстоянию линзы, дает действительное перевернутое изображение на таком же расстоянии с противоположной стороны собирающей линзы (в чем можно убедиться построением или используя формулу тонкой линзы $\frac{1}{2f}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \quad b=2f$)	**1 б**

<table>
<tr><td>Расстояние между рассеивающей и собирающей линзами также равно удвоенному фокусному расстоянию собирающей линзы. Следовательно, так как оптические оси линз совпадают, все лучи, прошедшие через собирающую линзу пройдут через оптический центр рассеивающей линзы, а лучи, прошедшие через оптический центр тонкой линзы, не преломляются (см. рисунок)

</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>Чтобы определить размер светлого пятна на экране, рассмотрим треугольники AA'O и BB'O. Эти треугольники подобны, так как углы O у них вертикальные (и равные), а экран и линза параллельны друг другу, следовательно углы A' и B (A и B') накрестлежащие и равные. Высоты треугольников лежат на главной оптической оси линз, но у треугольника AA'O она в два раза длиннее, следовательно все линейные размеры данного треугольника вдвое больше. Отсюда следует, что диаметр светлого пятна на экране BB' вдвое меньше диаметра собирающей линзы AA', т.о. он равен 4 см.</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>Ответ: Даметр пятна 4 см.</td><td>1 б</td></tr>
</table>

7) **Условие: «Столб воды»** Длинная и широкая трубка закрыта с одного конца герметичным поршнем, противоположный конец трубки опущен в большой бассейн. Вода в бассейне и окружающий воздух находятся при температуре 70 °C, а барометр, установленный возле бассейна показывает давление 110 000 Па. В начальный момент времени поршень расположен ровно у открытого конца трубки, опущенной в воду. Поршень начали медленно поднимать до высоты 20 м над уровнем воды в бассейне. На сколько отличаются уровни воды в бассейне и в трубке? При решении можно пренебречь капилярными эффектами.

“Решение Водовозова”

Допустим вода не будет подниматься за поршнем, тогда над водой образуется вакуум, а так как под вакуумом вода, она сразу же поднимется до поршня. Потом поршень поднимется еще чуть-чуть, снова получится вакуум и вода еще поднимется. Значит вода не сможет оторваться от поршня и поднимется также высоко как и поршень, то есть на 20 м.

Ответ: 20 м.

“Решение Водоносова”

В самом начале вода внутри трубке будет подниматься вместе с поршнем, но не постоянно. Так как по закону Паскаля на уровне воды в бассейне давление внутри и снаружи трубки должны быть равны:

$$p_a = \rho_{70} g h \quad \Rightarrow \quad h = \frac{p_a}{\rho_{70} g}.$$

В таблице находим, что плотность воды при 70 °C 977,78 кг/м^3, ускорение свободного падения 9,81 м/с^2, нормальное атмосферное давление 101 325 Па

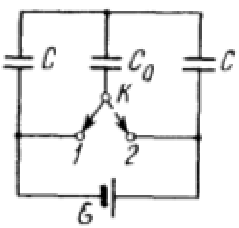
$$h = \frac{101325}{977{,}78 \cdot 9{,}81} = 10{,}56 \quad м$$

Ответ: 10 м 56 см.

Решение:

<u>“Решение Водовозова”</u> В решении не учтено, что по закону Паскаля давление на уровне, соответствующем поверхности воды в бассейне, давления внутри и снаружи трубки должны быть равны. Если бы вода поднялась на 20 м, она создала бы давление чуть меньше $2\cdot10^5$ Па, что больше давления воздуха в помещении, приведенного в условии.	**1 б**
<u>“Решение Водоносова”</u> В решении верно указано, что вода не сможет подняться на 20 м и плотность воды при 70 °С меньше 1000 кг/м^3, но неверно взято значение давления воздуха, так как в условии не сказано, что условия нормальные, и указано иное значение давления. Кроме того, не учтено, что внутри трубки над поверхностью воды будет насыщенный водяной пар (в условии не сказано, что можно пренебречь испарением воды и из таблицы давлений насыщенного водяного пара видно, что при 70 °С давление насыщенного пара составляет почти треть от атмосферного давления при нормальных условиях).	**3 б**
По закону Паскаля давления на уровне поверхности воды в бассейне внутри трубки и снаружи трубки должны быть равны. Давление снаружи трубки, равное атмосферному давлению $p_{атм}$, приведено в условии. Давление внутри трубки складывается из давления водяного пара $p_п$, и давления столба воды $\rho g h$. $p_{атм} = p_n + \rho g h$	**1 б**
В таблице давлений насыщенного водяного пара находим, что $p_n = 31167$ Па, следовательно $h = \dfrac{p_{атм} - p_n}{\rho g} = \dfrac{110000 - 31176}{977{,}78\cdot 9{,}81} \approx 8{,}22 \quad м$	**1 б**
Ответ: 8,22 м.	**1 б**

8) Условие: «Конденсаторы» В начальный момент времени ключ в схеме на рисунке справа находится в положении *1*, ток в системе не течет и все идеальные конденсаторы полностью заряжены. В некоторый момент времени ключ переводят в положение *2*. Сколько энергии выделится при этом переключении? Величины, приведенные на рисунке можно считать известными, а провода идеальными.



<u>“Решение”</u>

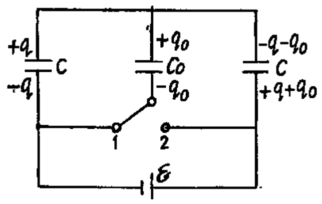
Принципиально схема до переключения ключа и после одна и та же, поэтому напряжение на конденсаторах C «поменяются местами», значит их суммарная энергия не изменится. Энергия конденсатора C_0 не изменится также. Полная энергия системы осталась прежней, следовательно изменение энергии равно 0, и выделится энергия не может. Кроме того судя по тому, что провода идеальные, тогда в такой схеме совершенно негде выделяться теплу вообще.

Ответ: 0 Дж.

Решение:

Даже если провода идеальные, источник напряжения совершает работу по разделению заряда и, следовательно, выделяет энергию. И так как в решении верно указано, что суммарная энергия конденсаторов не изменилась, вся	**1б**

<table>
<tr><td>энергия полученная за счет работы источника должна рассеяться. (Хотя при зарядке разряженного конденсатора часть энергии запасается в конденсаторе, но и в этом случае часть энергии рассеивается.)</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>



Рассмотрим начальное распределение заряда в системе. Пусть левый конденсатор C имеет заряд q, а конденсатор C_0 — q_0, тогда правый конденсатор C имеет заряд $q + q_0$. Распределение знаков зарядов показано на рисунке.
При этом напряжение на левом конденсаторе C равно напряжению на конденсаторе C_0, так как они подключены параллельно.

$$\frac{q}{C} = \frac{q_0}{C_0}$$

Для дальнейшего решения удобно найти эквивалентную емкость и представить напряжение на этих двух конденсаторах через нее. Для параллельно подключенных конденсаторов эквивалентная емкость — сумма емкостей конденсаторов, а заряд — сумма зарядов конденсаторов. Тогда

$$\frac{q}{C} = \frac{q_0}{C_0} = \frac{q+q_0}{C+C_0}\ .$$

Сумма напряжений на конденсаторе C_0 и правом конденсаторе C (или двух конденсаторах C, или эквивалентном конденсаторе и правом C) равна ЭДС источника.

$$\frac{q_0}{C_0} + \frac{q+q_0}{C} = \varepsilon$$

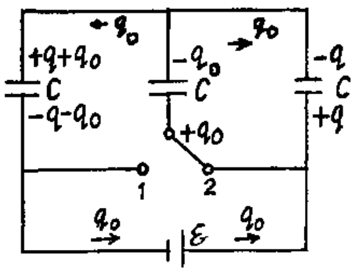
или

$$\frac{q+q_0}{C+C_0} + \frac{q+q_0}{C} = \varepsilon \quad \Rightarrow \quad q+q_0 = \varepsilon\frac{C(C+C_0)}{C+C+C_0} = \varepsilon\frac{C(C+C_0)}{2C+C_0}$$

Откуда

$$\frac{q_0}{C_0} = \frac{q+q_0}{C+C_0} = \varepsilon\frac{C}{2C+C_0} \quad \Rightarrow \quad q_0 = \varepsilon\frac{CC_0}{2C+C_0}\ .$$

Аналогично можно найти q.
</td><td>3 б</td></tr>
<tr><td>



Распределение зарядов после переключения ключа похоже на распределение до, с точностью до зеркальной перестановки левой и правой частей и замены знаков зарядов на противоположные, так как зеркально меняется только верхняя часть схемы, а источник «не отражается».
</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>

Из рисунка видно, что через источник прошел заряд q_0 с левого конденсатора C (так как этот заряд может пройти только через источник).
Работа источника (и рассеянная энергия, см. комментарий к “решению”) равна

$$\Delta E = A = q_0\varepsilon = \varepsilon^2\frac{CC_0}{2C+C_0}$$
</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>Ответ: $\Delta E = \varepsilon^2\frac{CC_0}{2C+C_0}$</td><td>1 б</td></tr>
</table>

9) **Условие: «Высокий полет»** Ловкий метатель камней хочет попасть в цель, расположенную на вершине столба высотой h. С какой минимальной скоростью он может бросить камень, чтобы попасть в цель, если бросать камень можно только с расстояния l от столба? При решении задачи сопротивлением воздуха можно пренебречь.

<u>“Решение”</u>

Очевидно, что скорость будет минимальной, когда цель находится в вершине траектории камня, который летит по параболе, так как сопротивлением воздуха можно пренебречь. Проверим это утверждение в предельном случае — когда Ловкий Метатель стоит прямо под столбом, тогда можно считать, что $l = 0$. В этом случае камень должен лететь вертикально вверх и минимальная скорость, при которой он попадет в Цель — это минимальная скорость, при которой он вообще долетит до высоты h, а значит это будет именно вершина траектории.

Максимальная высота зависит от скорости и угла бросания.

$$h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g}$$

Дальность полета тела, брошенного под углом к горизонту

$$L = \frac{v^2 \sin 2\alpha}{2g}$$

$$\frac{L}{h} = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{L}{2h}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1}$$

$$\sin^2\alpha = 1 - \frac{1}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} = \frac{\mathrm{tg}^2\alpha}{\mathrm{tg}^2\alpha + 1} = \frac{L^2}{L^2 + 4h^2}$$

$$h = \frac{v^2 \sin^2\alpha}{2g} = \frac{v^2}{2g}\frac{L^2}{L^2 + 4h^2}$$

$$v = \sqrt{2gh\frac{L^2 + 4h^2}{L^2}}$$

Ответ: $v = \sqrt{2gh\frac{L^2 + 4h^2}{L^2}}$.

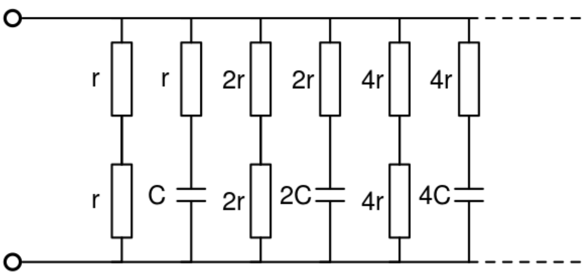
Решение:

Небольшая ошибка состоит в том, что при вычислении, связанном с максимальной высотой подъема тела, брошенного под углом к горизонту, нужно брать не максимальную дальность полета, а только половину от нее, так как на половине дальности полета достигается максимальная высота. Однако это не имеет большого значения, так как решение в целом построено на неверном предположении, что скорость минимальна, если цель достигается в точке максимального подъема камня. В этом легко убедиться, рассмотрев другой предельный случай: если цель расположена на высоте $h = 0$, скорость должна быть бесконечно большой, чтобы удовлетворить условию выбранному в “решении”.	**2 б**

Также в решении есть вычислительная ошибка: должно быть $\frac{L}{h}=\frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}$	
Завсимость координат от времени имеет вид: $x = v_0\cos\alpha t$ $y = v_0\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$ где v_0 — начальная скорость камня, α — угол, образуемый начальной скоростью с горизонтом.	**1 б**
Условие попадания в цель: $x = l$ и $y = h$, откуда следует $l = v_0\cos\alpha t \quad \Rightarrow \quad t = \frac{l}{v_0\cos\alpha}$ $h = v_0\sin\alpha t - \frac{gt^2}{2}$ $h = v_0\sin\alpha \frac{l}{v_0\cos\alpha} - \frac{g}{2}\frac{l^2}{v_0^2\cos^2\alpha}$ $h = l\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2}\frac{1}{\cos^2\alpha}$	**1 б**
данное выражение можно представить как квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}\alpha$ $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \mathrm{tg}^2\alpha + 1$ $h = l\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{g}{2}\frac{l^2}{v_0^2}\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)$ $\frac{-gl^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha + l\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2} - h = 0$ $\frac{gl^2}{2v_0^2}\mathrm{tg}^2\alpha - l\,\mathrm{tg}\alpha + \frac{gl^2}{2v_0^2} + h = 0$ Это уравнение определяет под каким углом нужно бросить камень при данной начальной скорости, чтобы попасть в цель.	**1 б**
Это уравнение имеет решение только если дискриминант не отрицателен.	**1 б**
$D = l^2 - 4\frac{gl^2}{2v_0^2}\left(\frac{gl^2}{2v_0^2} + h\right)$ $D = l^2 - \frac{g^2l^4}{v_0^4} - 2h\frac{gl^2}{v_0^2} \geq 0$ умножим неравенство на v_0^4/l^2 $v_0^4 - 2ghv_0^2 - g^2l^2 \geq 0$ Последнее неравенство не выполняется при $v_0 = 0$, следовательно, существует минимальная скорость, при которой начальное квадратное уравнение имеет решение. Для нахождения минимальной скорости рассмотрим последнее неравенство внимательнее. Переобозначим $v_0^2 = z$ $z^2 - 2ghz - g^2l^2 \geq 0$ В левой части этого неравенства записано уравнение параболы. При больших значениях z это неравенство выполнено. Уменьшая z, постепенно выражение	**2 б**

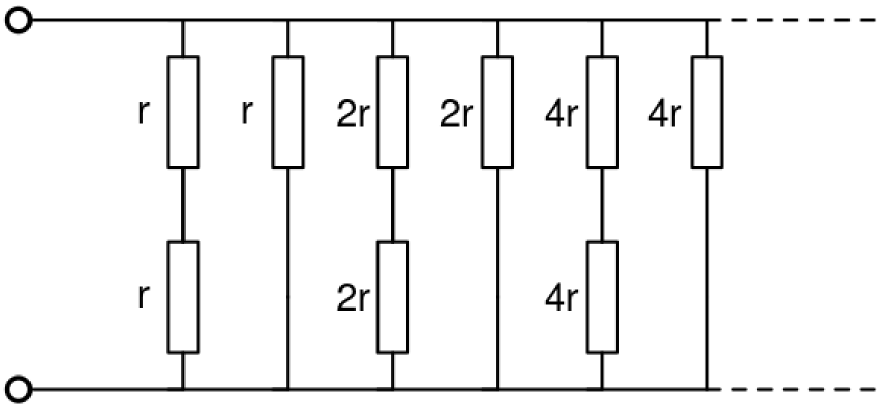
в левой части можно уменьшить до нуля (так как это уравнение параболы с ветвями, направленными вверх), следовательно, минимальное положительное (отрицательные значения z не подходят, так как $z = v_0^2$) значение z, удовлетворяющее неравенству, достигается при условии: $z^2 - 2ghz - g^2 l^2 = 0$ $z = \dfrac{2gh \pm \sqrt{4g^2h^2 + 4g^2l^2}}{2}$ $z = g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)$	
$v_0 = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)}$	
Ответ: $v_0 = \sqrt{g\left(h + \sqrt{h^2 + l^2}\right)}$.	**1 б**

10) Условие: «Бесконечность» В схеме, представленной на рисунке справа, блок из трех резисторов и конденсатора повторяется бесконечное число раз, но в каждом следующем таком блоке все сопротивления и емкость вдвое больше, чем в предыдущем блоке. Вычислите сопротивление данной схемы при подключении ее к источнику постоянного тока. Данные, приведенные на рисунке, можно считать известными.



<u>“Решение”</u>

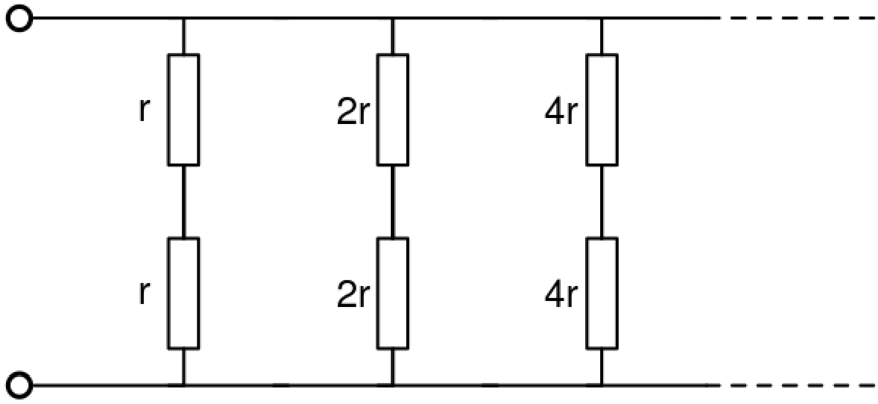
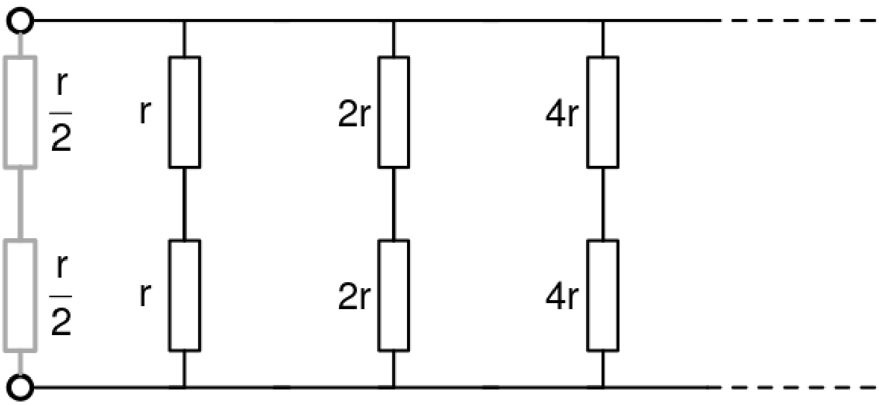
Так как схема подключена к источнику постоянного тока, а конденсаторы не предназначаются для цепей постоянного тока, можно поэтому конденсаторы не рассматривать. Тогда схему можно перерисовать вот таким способом:



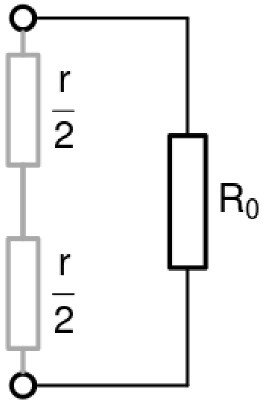
На новой схеме можно объединить все пары резисторов, находящихся на одной ветке в один резистор, чье сопротивление будет только половина сопротивления старого резистора. Тогда схема получится просто из параллельных резисторов. Как известно, если подключить что-то параллельно схеме, то новое полное сопротивление будет меньше, чем до подключения. А значит в этом случае, когда подключено бесконечное количество таких новых резисторов, сопротивление будет постоянно уменьшаться, и поэтому для бесконечного числа резистров полное сопротивление будет 0.

Ответ: 0.

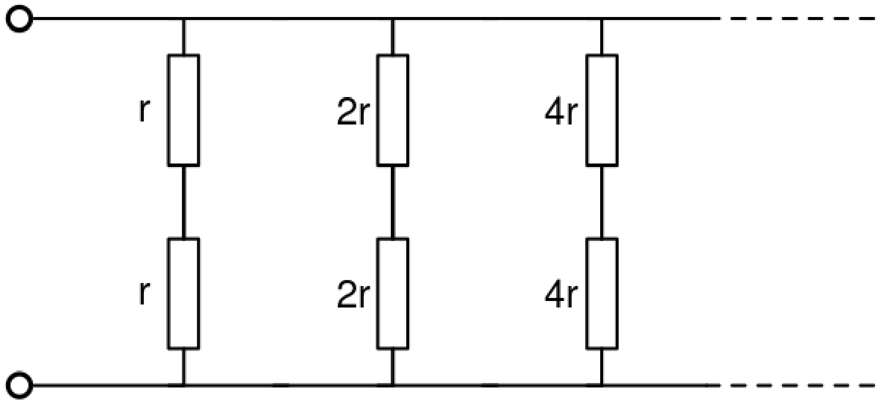
Решение 1:

<table>
<tr><td>Постоянный ток не может пройти через конденсатор, поэтому через резистор, включенный последовательно с конденсатором, ток тоже не пойдет, поэтому схема перерисована неверно (так как предполагает, что резистор не имеет сопротивления). Также неверно утверждение, что при объединении двух последовательно соединенных резисторов их эквивалентное сопротивление составляет половину спортивления каждого из резисторов (то есть автор решения в данном случае перепутал последовательное и параллельное соединения).
Из того, что каждое следующее значение какой-то последовательности чисел меньше чем предыдущее, не следует что при бесконечно большом числе элементов они неограниченно приближаются к нулю. Например, последовательность вида $1+1/n$ удовлетворяет условию, что число при $n + 1$ меньше чем при n, но эта последовательность чисел никогда не будет меньше 1.</td><td>3 б</td></tr>
<tr><td>Так как через конденсатор постоянный ток не течет, всю «ветку», включенную последовательно с конденсатором, можно убрать со схемы и при этом ничего не изменится.

</td><td>1 б</td></tr>
<tr><td>Новая схема состоит из элементов, соединенных параллельно, причем, сопротивление каждого последующего блока вдвое больше предыдущего.
Добавим к «началу» этой схемы аналогичный блок с сопротивлением в два раза меньше, чем у первого блока схемы:


Новая схема выглядит также как и предыдущая с точностью до уменьшения всех сопротивлений вдвое.1 б</td><td></td></tr>
<tr><td>Обозначим сопротивление первоначальной схемы R_0, тогда сопротивление новой схемы равно $R_0/2$. С другой стороны, схему с добавленным блоком можно представить в виде нового блока и эквивалентного сопротивления, равного сопротивлению первоначальной схемы:</td><td>1 б</td></tr>
</table>

 В этом случае сопротивление схемы можно записать в виде: $\frac{2}{R_0} = \frac{1}{R_0} + \frac{1}{r/2 + r/2}$ Откуда следует, что $\frac{1}{R_0} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad R_0 = r$	
Ответ: r.	**1 б**

Решение 2:

Постоянный ток не может пройти через конденсатор, поэтому через резистор, включенный последовательно с конденсатором, ток тоже не пойдет, поэтому схема перерисована неверно (так как предполагает, что резистор не имеет сопротивления). Из того, что каждое следующее значение какой-то последовательности чисел меньше чем предыдущее, не следует что при бесконечно большом числе элементов они неограниченно приближаются к нулю. Например, последовательность вида $1+1/n$ удовлетворяет условию, что число при n + 1 меньше чем при n, но эта последовательность чисел никогда не будет меньше 1.	**2 б**
Так как через конденсатор постоянный ток не течет, всю «ветку», включенную последовательно с конденсатором, можно убрать со схемы и при этом ничего не изменится. 	**1 б**
Пронумеруем блоки слева направо целыми числами, начиная с 1. Тогда сопротивление блока с номером n равно $r_n = r \cdot 2^n$. Тогда сопротивление всей схемы, R_0, связано с сопротивлением блоков,	**2 б**

соединенных параллельно, соотношением $$\frac{1}{R_0}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}+\quad\dots=\frac{1}{2r}+\frac{1}{4r}+\frac{1}{8r}+\quad\dots=\frac{1}{r}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\quad\dots\right)$$ Последняя сумма — сумма геометрической прогрессии с первым элементом равным $b_1=1/2$ и показателем геометрической прогрессии $q=1/2$. Сумму геометрической прогрессии можно найти по формуле: $$S=b_1\frac{1}{1-q}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-1/2}=1,$$ откуда следует, что $$\frac{1}{R_0}=\frac{1}{r}\quad\Rightarrow\quad R_0=r$$	
Ответ: r.	**1 б**

Некоторые константы

Ускорение свободного падения на поверхности Земли, м/с^2	g	9,81
Ускорение свободного падения на поверхности Нептуна, м/с^2		11,15
Гравитационная постоянная, м^3·с$^{-2}$·кг$^{-1}$	G	$6{,}67\cdot10^{-11}$
Нормальное атмосферное давление, Па	p_0	101 325
Универсальная газовая постоянная, Дж·моль$^{-1}$·К$^{-1}$	R	8,31
Число Авогадро, моль$^{-1}$	N_A	$6{,}02\cdot10^{23}$
Заряд электрона, Кл	e	$-1{,}602\cdot10^{-19}$

Некоторые данные о Нептуне

Средний радиус планеты, км	$2{,}46\cdot10^4$
Масса, кг	10^{26}
Ускорение свободного падения на поверхности, м/с^2	11,15
Средняя плотность, г/см^3	1,638
Примерный радиус ядра*, км	5000
Энергия, получаемая от Солнца единичной поверхностью планеты за единицу времени, Вт/м^2 (данные приведены в пересчете на полную поверхность планеты)	0,254
Энергия, излучаемая планетой с единичной поверхности за единицу времени, Вт/м^2	0,687

* данные являются грубой оценкой и приведены только для решения задачи.

Плотность некоторых веществ

Вещество	Плотность, кг/м^3
Средняя плотность Нептуна	1 638
Воздух (сухой, при температуре 4 °C и нормальном атмосферном давлении)	1,27
Алмаз	3 500
Вода (при температуре 4 °C)	1 000
Медь	8 920

Молярные массы некоторых веществ

Вещество	Молярная масса, г/моль
Воздух (сухой)	28,98
Алмаз	12,01
Вода	18,02
Медь	63,55

Температуры некоторых фазовых переходов

	Температура, °C
Плавление льда при нормальных условиях	0
Кипение воды при нормальных условиях	100
Плавление меди	1083

Плотность воды от 0 °C до 100 °C

Температура, °C	Плотность, кг/м^3
0	999,84
4	1000,00
10	999,70
20	998,21
30	995,65
40	992,22
50	988,03
60	983,20
70	977,78
80	971,82
90	965,35
100	958,40

Давление насыщенных паров воды от 0 °С до 100 °С

Температура, °С	Давление, кПа
0	0,6113
4	0,8136
10	1,2281
20	2,3388
30	4,2455
40	7,3814
50	12,344
60	19,932
70	31,176
80	47,373
90	70,117
100	101,325