Олимпиада по алгебре. Финальный тур

8 января

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу `kazan-mat@mail.ru`. Общие комментарии по задачам смотрите на странице `http://www.kazan-math.info/`. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии. Напоминаем, что решения высылаются одним письмом на адрес `olymp.alg@gmail.com` до 15:00 по **московскому** времени. Подробные правила оформления Вы можете прочитать на сайте `http://www.kazan-math.info/`. Не забудьте пройти регистрацию!

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

1. Рациональные числа a, b, c удовлетворяют уравнению $(a+b+c)(a+b-c)=c^2$. Докажите, что $a+b=c=0$.

2. Даны различные простые числа p и q. Докажите, что число p^2+q^2 не делится на число $p+q$.

3. Докажите, что при любом x, лежащем в интервале $(0;\frac{\pi}{2})$, выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2.$$

4. Даны 5 положительных вещественных чисел. Докажите, что среди них найдутся два, для которых выполнено

$$0 \leqslant \frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+b} < \frac{1}{4}.$$

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, и написать верное решение. Максимальный балл за каждую из задач этого блока также равен 7.

5. Найдите все вещественные решения уравнения

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1.$$

«Решение». Заметим, что 2^x, 4^x, 6^x кратны 2 при $x \neq 0$. Но 3^x и 9^x всегда нечетны, значит, левая часть четна. Но справа стоит 1, поэтому равенство при $x \neq 0$ невозможно. А при $x=0$ как раз получается верное равенство, значит, единственным решением является $x=0$.

6. Числа a, b и c таковы, что система уравнений $y=ax+b$, $y=bx+c$, $y=cx+a$ имеет решение. Докажите, что $a=b=c$.

«Решение». Не умаляя общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Заметим для начала, что если какие-то два числа из a, b и c равны, то третье также им равно (скажем, если $a=b$, то $ax+b=y=bx+c=ax+c$, откуда $b=c$). Поэтому будем рассматривать только случай, когда все знаки строгие.

Заметим, что если система имеет решение при неотрицательном x, то $ax+b>bx+c$ при $x \geqslant 0$, так как $ax \geqslant bx$ и $b>c$, что невозможно. Если же $x<0$, то $cx+a>ax+b$, так как $cx>ax$ и $a>b$. Значит, все три числа a, b и c обязательно равны между собой.

7. Найдите все натуральные n, для которых число n^3-7n является квадратом целого числа.

«Решение». Разложим выражение на множители: $n^3-7n=n(n^2-7)$. Если произведение указанных чисел является квадратом, то оба множителя должны быть квадратами целых чисел. Тогда $n^2-7=k^2$, а значит разница между двумя квадратами равна 7. Это возможно только в случае $n=4$, $k=3$, то есть $n=4$ подходит под условие задачи.

8. Даны такие положительные рациональные числа a и b, для которых число $\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{ab}$ рациональное. Докажите, что числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные.

«Решение». Добавим к указанному выражению 1, от этого оно не перестанет быть рациональным. Тогда оно раскладывается как $(1+\sqrt{a})(1+\sqrt{b})$, и это произведение должно быть рациональным. Тогда оба числа $1+\sqrt{a}$ и $1+\sqrt{b}$ рациональны, а значит и $\sqrt{a}$ с $\sqrt{b}$ — рациональны, что и требовалось.