Олимпиада по алгебре. Финальный тур. Решения

8 января

1. Рациональные числа a, b, c удовлетворяют уравнению $(a+b+c)(a+b-c)=c^2$. Докажите, что $a+b=c=0$.

Решение. Раскроем скобки и представим данное выражение в виде $(a+b)^2-c^2=c^2$, или $(a+b)^2=2c^2$. Так как числа a, b и c рациональны, а 2 не является квадратом рационального числа, то $c=0$, но тогда и $a+b=0$.

2. Даны различные простые числа p и q. Докажите, что число p^2+q^2 не делится на число $p+q$.

Решение. Запишем $p^2+q^2=(p+q)^2-2pq$. Заметим, что если p^2+q^2 делится на $p+q$, то $2pq$ делится на $p+q$. Но при этом число $p+q$ взаимно просто с p и q (так как p и q различны), значит, 2 делится на $p+q$, что невозможно.

3. Докажите, что при любом x, лежащем в интервале $(0;\frac{\pi}{2})$, выполнено неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x}+(\operatorname{ctg} x)^{\cos x}\geqslant 2.$$

Решение. Обозначим $\sin x=a$, $\cos x=b$. Тогда написанное слева выражение представляется в виде

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a+\left(\frac{b}{a}\right)^b.$$

Пусть не умаляя общности $a\geqslant b$. Представим $a=b+c$, $c\geqslant 0$. Тогда произведение двух слагаемых равно

$$\left(\frac{a}{b}\right)^a\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^b=\left(\frac{a}{b}\right)^{b+c}\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^b=1\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

Так как $\frac{a}{b}\geqslant 1$, $c\geqslant 0$, то полученное произведение не меньше 1. Тогда и корень из произведения не меньше 1, и по неравенству между средними арифметическим и геометрическим сумма, данная в условии, больше либа равна удвоенного корня из произведения, то есть 2.

4. Даны 5 положительных вещественных чисел. Докажите, что среди них найдутся два, для которых выполнено

$$0\leqslant\frac{1}{1+a}-\frac{1}{1+b}<\frac{1}{4}.$$

Решение. Напишем для каждого из данных 5 чисел выражение $\frac{1}{1+x}$. Так как x положительно, то эта дробь больше 0 и меньше 1, то есть дроби принимают значения из полуинтервала $[0;1)$. Разобьем полуинтервал $[0;1)$ на четыре полуинтервала $[0;\frac{1}{4})$, $[\frac{1}{4};\frac{1}{2})$, $[\frac{1}{2};\frac{3}{4})$, $[\frac{3}{4};1)$. Тогда в какой-то из интервалов попадут две дроби, для них и будет выполняться требуемое неравенство, достаточно лишь из большей дроби вычесть меньшую.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, и написать верное решение. Максимальный балл за каждую из задач этого блока также равен 7.

5. Найдите все вещественные решения уравнения

$$2^x+3^x-4^x+6^x-9^x=1.$$

«Решение». Заметим, что 2^x, 4^x, 6^x кратны 2 при $x\neq 0$. Но 3^x и 9^x всегда нечетны, значит, левая часть четна. Но справа стоит 1, поэтому равенство при $x\neq 0$ невозможно. А при $x=0$ как раз получается верное равенство, значит, единственным решением является $x=0$.

Ошибка в «решении» в том, что ни о какой делимости в этой задаче речь идти не может: число x по условию вещественное, а значит слагаемые из левой части могут принимать не только целые значения, но и, скажем, иррациональные.

Решение. Обозначим $2^x=a$, $3^x=b$. Тогда данное в левой части выражение переписывается как $a+b-a^2+ab-b^2=1$, или, после переноса 1 в левую часть и домножения на -1, $a^2+b^2+1-a-b-ab=0$. Домножим обе части на 2 и разложим левую в сумму квадратов: $(a-1)^2+(b-1)^2+(a-b)^2=0$.

Сумма квадратов может равняться нулю только в случае, если каждый из квадратов равен 0, то есть $a = b = 1$. Этому случаю удовлетворяет только $x = 0$, и он подходит.

Ответ. $x = 0$.

6. Числа a, b и c таковы, что система уравнений $y = ax + b$, $y = bx + c$, $y = cx + a$ имеет решение. Докажите, что $a = b = c$.

«Решение». Не умаляя общности можно считать, что $a \geqslant b \geqslant c$. Заметим для начала, что если какие-то два числа из a, b и c равны, то третье также им равно (скажем, если $a = b$, то $ax + b = y = bx + c = ax + c$, откуда $b = c$). Поэтому будем рассматривать только случай, когда все знаки строгие.

Заметим, что если система имеет решение при неотрицательном x, то $ax + b > bx + c$ при $x \geqslant 0$, так как $ax \geqslant bx$ и $b > c$, что невозможно. Если же $x < 0$, то $cx + a > ax + b$, так как $cx > ax$ и $a > b$. Значит, все три числа a, b и c обязательно равны между собой.

Ошибкой данного «решения» является неверное предположение, что числа a, b и c можно не умаляя общности упорядочить. Дело в том, что данное условие не является *симметрическим* (то есть не меняющимся при переобозначении переменных): например, при замене a на b и наоборот мы получим уравнение $y = bx + a$, которого не было изначально. А тогда про упорядочение всех трех чисел говорить нельзя. Другое дело, что данное условие является *циклическим*, то есть не меняется при сдвиге всех обозначений на 1, поэтому можно все-таки предположить, что a является наибольшим (иначе переобозначить) и дальше рассмотреть два случая, какая из оставшихся переменных больше. Но мы приведем другое

Решение. Нарисуем три графика, соответствующих данным уравнениям. Это три прямые (графика линейных функций), пересекающиеся в одной точке, так как у системы по условию есть решеине. Эта общая точка не может лежать на оси ординат, так как тогда x-координата общей точки равна 0, значит, $a = b = c$.

Пусть x-координата точки пересечения трех прямых положительна. Упорядочим прямые по убыванию y-координаты точки пересечения прямой с осью ординат. Тогда угловой коэффициент у первой прямой должен быть самым маленьким, в третьей — самым большим, но тогда у второй прямой оба коэффициента средние, что невозможно.

Пусть x-координата точки пересечения трех прямых отрицательна. Также упорядочим прямые, тогда у первой прямой и угловой коэффициент, и точка пересечения с осью ординат максимальные, что опять же невозможно.

7. Найдите все натуральные n, для которых число $n^3 - 7n$ является квадратом целого числа.

«Решение». Разложим выражение на множители: $n^3 - 7n = n(n^2 - 7)$. Если произведение указанных чисел является квадратом, то оба множителя должны быть квадратами целых чисел. Тогда $n^2 - 7 = k^2$, а значит разница между двумя квадратами равна 7. Это возможно только в случае $n = 4$, $k = 3$, то есть $n = 4$ подходит под условие задачи.

Ошибка «решения» в том, что чтобы произведение двух чисел являлось квадратом, не обязательно обоим числам быть квадратами: скажем, $2 \cdot 18 = 6^2$, при этом ни 2, ни 18 не являются квадратами.

На самом же деле, если $n = k^2 \cdot t$, где t свободно от квадратов, то $n^2 - 7$ должно делиться на t, чтобы произведение все-таки было квадратом. Но тогда у n и $n^2 - 7$ есть общий делитель t, при этом по алгоритму Евклида общий делитель чисел n и $n^2 - 7$ является также делителем числа 7. То есть либо $t = 1$ (и этот случай верно разобран в приведенном «решении»), либо $t = 7$. В таком случае имеем $n(n^2 - 7) = 7k^2(7^2k^4 - 7) = 7^2k^2(7k^4 - 1)$, то есть, так как 7^2k^2 является квадратом, то и $7k^4 - 1$ — квадрат. Но посмотрим на остатки при делении на 4. Число $7k^4 - 1$ дает остатки 2 и 3, а квадрат таких остатков давать не может. Значит, этот случай невозможен.

Ответ. $n = 4$.

8. Даны такие положительные рациональные числа a и b, для которых число $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$ рациональное. Докажите, что числа $\sqrt{a}$ и $\sqrt{b}$ тоже рациональные.

«Решение». Добавим к указанному выражению 1, от этого оно не перестанет быть рациональным. Тогда оно раскладывается как $(1 + \sqrt{a})(1 + \sqrt{b})$, и это произведение должно быть рациональным. Тогда оба числа $1 + \sqrt{a}$ и $1 + \sqrt{b}$ рациональны, а значит и $\sqrt{a}$ с $\sqrt{b}$ — рациональны, что и требовалось.

Ошибкой является неверный вывод, что оба числа $1+\sqrt{a}$ и $1+\sqrt{b}$ должны быть рациональными, коль скоро их произведение рационально. На самом же деле два числа могут быть иррациональны и давать в произведении рацониальное, например, $\sqrt{2}$ и $2\sqrt{2}$.

Решение. Все же добавим единицу к данному в условии выражению, так работать будет удобнее, и разложим его в произведение $(\sqrt{a}+1)(\sqrt{b}+1)$. Домножим это произведение на $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)$. Получим $(a-1)(b-1)$, то есть рациональное число. Значит, то, на что мы домножали исходное ненулевое рациональное число, т. е. $(\sqrt{a}-1)(\sqrt{b}-1)$, также рационально. Сложим это выражение с $(\sqrt{a}+1)(\sqrt{b}+1)$, получим, что $2\sqrt{ab}+2$ рационально, как сумма рациональных чисел, а значит и $\sqrt{ab}$ рационально, откуда сумма $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ рациональна. Чтобы доказать наконец рациональность самих чисел a и b, домножим положительное рациональное числое $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ на $\sqrt{a}$, получим $a+\sqrt{ab}$, то есть вновь рациональное число, поэтому то, на что мы домножали, рационально, аналогично $\sqrt{b}$ является рациональным, что и требовалось.