Заочная вступительная работа. 7 класс

19 марта

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до 15-го апреля на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр X класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Существует ли три положительных числа a, b, c, для которых верно $\sqrt{a-c}+\sqrt{b-c}=\sqrt{a+b}$? Ответ поясните.

2. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $a+b=175$, а произведение ab делится на 175.

3. Существует ли у уравнения $x(y-z)+y(z-x)=6$ решение в целых числах, в котором все три числа больше 1000?

4. Алия и Камиля могут покрасить забор за 9 часов. Камиля и Диана могут покрасить этот же забор за 12 часов, а Диана и Алия — за 18 часов. За сколько часов девочки покрасят забор, работая втроем? Каждая из девочек все время работает с постоянной производительностью.

5. Вова придумал положительную несократимую дробь, у которой сумма числителя и знаменателя равна 2017. Он вычел из числителя 1 и сократил полученную дробь. Получилось $\frac{3}{5}$. Какую дробь придумал Вова? Найдите все возможные варианты ответа и объясните, почему других быть не может.

6. 77 человек, некоторые из которых рыцари и всегда говорят правду, а остальные — лжецы и всегда лгут, встали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они встали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

7. На столе лежит кучка из 11022011 конфеток. Двое играют в следующую игру. За один ход можно взять из любой кучки любое число конфеток, большее 1, которое является делителем числа конфеток в этой кучке, и создать из них отдельную кучку. Проигрывает тот, кто не может сделать очередной ход. Кто выиграет при правильной игре: первый или его соперник?

8. Несколько (больше пяти) шариков выложены в ряд. Каждый покрашен в какой-то цвет. Оказалось, что среди любых трёх шариков, идущих подряд, хотя бы два— красные, а среди любых шести шариков, идущих подряд, хотя бы два — синие. Может ли среди этих шариков оказаться жёлтый?

Задания запрещено обсуждать в течение всего срока выполнения.
Решения будут выложены на сайте `kazan-math.info` как только жюри получит сканы всех работ участников.

Заочная вступительная работа. 8 класс

19 марта

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до 15-го апреля на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр X класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Дан параллелограмм $ABCD$. На его сторонах AB и AD выбрали точки X и Y соответственно (отличных от A) так, что $AD = DX$ и $AB = BY$. Докажите, что $CX = CY$.

2. Даны два натуральных числа a и b. Докажите, что хотя бы одно из чисел a, b и $a + b$ можно представить в виде разности двух квадратов целых чисел.

3. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Так оказалось, что $\angle CAB + \angle MCB = 90°$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный или прямоугольный.

4. В каждом поле квадратной таблицы 9×9 написано натуральное число. Затем мы подсчитали суммы чисел, расположенных в каждой строке и в каждом столбце. Может ли случиться так, что 18 полученных сумм — последовательные натуральные числа?

5. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $a + b = 175$, а произведение ab делится на 175.

6. Существует ли у уравнения $x(y - z) + y(z - x) = 6$ решение в целых числах, в котором все три числа больше 1000?

7. В турнире по настольному теннису приняли участие n спортсменов ($n \geqslant 4$). Каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не было. После турнира все участники сели за круглый стол так, что любой участник выиграл у своего соседа слева. Докажите, что найдется тройка спортсменов A, B и C такая, что A выиграл у B, B выиграл у C, C выиграл у A.

8. 77 человек, некоторые из которых рыцари и всегда говорят правду, а остальные — лжецы и всегда лгут, встали в круг. Всем известно, что их веса различны. На вопрос «У тебя есть сосед-лжец легче тебя?» все ответили «Да». После перерыва они встали в круг в другом порядке. Докажите, что на вопрос «У тебя есть сосед-рыцарь легче тебя?» как минимум двое ответят «Да».

Задания запрещено обсуждать в течение всего срока выполнения.
Решения будут выложены на сайте `kazan-math.info` как только жюри получит сканы всех работ участников.

Заочная вступительная работа. 9 класс

19 марта

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до 15-го апреля на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр X класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Так оказалось, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный или прямоугольный.

2. Про вещественные числа a, b, c, d известно, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите, что

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geqslant 0.$$

3. В каждом поле квадратной таблицы 9×9 написано натуральное число. Затем мы подсчитали суммы чисел, расположенных в каждой строке и в каждом столбце. Может ли случиться так, что 18 полученных сумм — последовательные натуральные числа?

4. Найдите все пары натуральных чисел a и b таких, что $a + b = 175$, а произведение ab делится на 175.

5. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Числа $1, 2, \ldots, n$ записывают в вершины правильного n-угольника. При каких n это можно сделать так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих вершинах была четной?

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что если a^2 делится на $a+b$, то и b^2 делится на $a+b$.

7. В турнире по настольному теннису приняли участие n спортсменов ($n \geqslant 4$). Каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не было. После турнира все участники сели за круглый стол так, что любой участник выиграл у своего соседа слева. Докажите, что найдется тройка спортсменов A, B и C такая, что A выиграл у B, B выиграл у C, C выиграл у A.

8. Дан треугольник ABC. Внутри него выбирают точку P. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Существует ли такой треугольник ABC, в котором точку P можно выбрать так, что площади ровно четырех из треугольников APF, BPF, BPD, CPD, CPE, APE равны?

Задания запрещено обсуждать в течение всего срока выполнения.
Решения будут выложены на сайте `kazan-math.info` как только жюри получит сканы всех работ участников.

Заочная вступительная работа. 10 класс

19 марта

Уважаемые участники!

Работа выполняется в течение месяца. Максимальный балл за каждую из задач равен 7 баллам. Задачи не обязательно располагаются по возрастанию сложности. Напоминаем Вам, что ответ без обоснования оценивается намного ниже, чем полное решение. Пожалуйста, используйте темно-синюю или черную пасту, пишите разборчиво. Для удобства, пронумеруйте страницы Вашей работы.

Работа должна быть отсканирована или сфотографирована в хорошем качестве. Крайне желательно, чтобы Ваша работа была выслана единым файлом формата pdf. Сделать это можно, например, воспользовавшись сервисом `pdfjoiner.com`.

Письма с работами отправляются до 15-го апреля на e-mail `spektr.kazan@gmail.com`. Тема письма заполняется так: *Спектр X класс Город (село) Фамилия Имя.*

Из нескольких писем одного участника проверяется только последнее, остальные удаляются. Поэтому если Вы хотите дополнить присланное ранее письмо, отправляйте заново все задачи.

Работы участников, незарегистрировавшихся в лагерь или неверно заполнивших поле «Тема» письма, а также работы, содержащие вместо вложенных файлов ссылки на файлы, размещенные в Интернете, могут быть проигнорированы!

Успехов!

1. Точка M — середина стороны AB треугольника ABC. Так оказалось, что $\angle CAB + \angle MCB = 90^\circ$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный или прямоугольный.

2. Про вещественные числа a, b, c, d известно, что $a + b = cd$ и $c + d = ab$. Докажите, что

$$(a + 1)(b + 1)(c + 1)(d + 1) \geqslant 0.$$

3. В каждом поле квадратной таблицы 9×9 написано натуральное число. Затем мы подсчитали суммы чисел, расположенных в каждой строке и в каждом столбце. Может ли случиться так, что 18 полученных сумм — последовательные натуральные числа?

4. Дано натуральное число $n \geqslant 3$. Числа $1, 2, \ldots, n$ записывают в вершины правильного n-угольника. При каких n это можно сделать так, чтобы сумма чисел в любых трех подряд идущих вершинах была четной?

5. Нечетные различные простые числа p и q таковы, что $p^2 + p$ делится на $q^2 + q$. Докажите, что число $\frac{1}{2}(p - q)$ — составное.

6. Даны натуральные числа a и b. Докажите, что если a^2 делится на $a+b$, то и b^2 делится на $a+b$.

7. В турнире по настольному теннису приняли участие n спортсменов ($n \geqslant 4$). Каждый сыграл с каждым ровно один раз, ничьих не было. После турнира все участники сели за круглый стол так, что любой участник выиграл у своего соседа слева. Докажите, что найдется тройка спортсменов A, B и C такая, что A выиграл у B, B выиграл у C, C выиграл у A.

8. Дан треугольник ABC. Внутри него выбирают точку P. Прямые AP, BP и CP пересекают стороны BC, AC и AB в точках D, E и F соответственно. Существует ли такой треугольник ABC, в котором точку P можно выбрать так, что площади ровно четырех из треугольников APF, BPF, BPD, CPD, CPE, APE равны?