Финал по геометрии

10 апреля

Уважаемые участники!

Свои вопросы Вы можете задать по электронному адресу kazan-mat@mail.ru. Общие комментарии по задачам смотрите на странице http://www.kazan-math.info/. Рекомендуем Вам периодически обновлять страницу, чтобы видеть самые последние общие комментарии. Напоминаем, что решения высылаются одним письмом на адрес olymp.geom@gmail.com до 18:00 по московскому времени. Подробные правила оформления Вы можете прочитать на сайте http://www.kazan-math.info/. Не забудьте пройти регистрацию!

Желаем успеха!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Каждая задача оценивается из 7 баллов.

1. Внутри правильного пятиугольника $ABCDE$ отмечены точки K и M, не лежащие на прямой CE, так, что углы EDK и MDC равны, а также равны углы MED и KCD. Всегда ли верно, что $KM \parallel EC$?

Ответ. Да, верно. **Решение.** Проведем биссектрису l угла CDE и сделаем относительно l осевую симметрию. Точка D при этой симметрии остается на месте, а точки C и E переходят друг в друга в силу правильности $ABCDE$. Также в силу равенства углов из условия симметричны лучи CK и EM, а также DK и DM. Значит, точки пересечения этих лучей, а именно M и K, также симметричны. Поэтому прямая MK перпендикулярна оси симметрии l. Но и CE, опять же в силу правильности пятиугольника $ABCDE$, перпендикулярна l, а значит две прямые MK и CE, перпендикулярные третьей l, параллельны.

2. Когда в остроугольном треугольнике ABC провели высоты AD и BE, оказалось, что $S_{BDE} \leqslant S_{DEA} \leqslant S_{EAB} \leqslant S_{ABD}$. Докажите, что треугольник ABC — равнобедренный.

Решение. Обозначим через H ортоцентр треугольника ABC. Из условия мы знаем, что $S_{BDE} \leqslant S_{DEA}$, убрав общую часть HDE, получаем, что $S_{HDB} \leqslant S_{HEA}$. С другой стороны, из условия $S_{EAB} \leqslant S_{ABD}$, также убрав общую часть AHB, получаем неравенство в другую сторону: $S_{HDB} \geqslant S_{HEA}$. Из этого следует, что $S_{HDB} = S_HEA$, откуда $ED \parallel AB$. Дальнейшее просто: мы только что получили, что $ABCD$ — трапеция, но кроме того, он вписанный, так как углы, опирающиеся на AB, составляют 90°. Поэтому $ABCD$ — равнобокая трапеция, откуда углы A и B равны, а значит треугольник ABC — равнобедренный.

3. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке T. Обозначим через P и Q центры описанных окружностей треугольников ABT и CDT соответственно. Докажите, что $4PQ \geqslant AB + CD$.

Решение. Проекция точки P на диагональ AC падает в середину AT, а точки Q — в середину TC, так как P и Q, являясь центрами описанных окружностей, лежат на серединных перпендикулярах к соответствующим отрезкам. А так как отрезок не меньше своей проекции, то $PQ \geqslant \frac{1}{2}AC$. Аналогично $PQ \geqslant \frac{1}{2}BD$. Поэтому

$4PQ \geqslant AC + BD$, и так как в выпуклом четырехугольнике сумма длин диагоналей больше суммы длин сторон, то $4PQ \geqslant AC + BD \geqslant AB + CD$, что и требовалось.

4. Отметим на плоскости несколько (конечное множество) точек и покрасим их в синий цвет. Для синей точки A синюю точку B назовем *близкой*, если никакая другая синяя точка, отличная от A, не расположена к точке A ближе. Может ли оказаться, что у каждой синей точки есть хотя бы 4 синие близкие точки?

Ответ. Нет, не может. **Решение.** Рассмотрим наименьшее расстояние r между синими точками. Так как их конечное количество, то такое найдется. Все точки, для которых близкие точки находятся на расстоянии r от них (заметим, что такие точно есть), покрасим в красный цвет. Рассмотрим выпуклую оболочку красных точек. Выберем произвольную ее вершину X, тогда угол, под которым видны соседние точки выпуклой оболочки из X, меньше $180°$. Поэтому, если она будет иметь 4 красные близкие точки, то угол, под которыми видны какие-то две из них, меньше $60°$. А значит расстояние между этими точками меньше, чем до точки X, то есть меньше r. Но это противоречит определению расстояния r.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, объяснить, почему те или иные рассуждения не верны и, возможно, написать верное решение. Конкретное задание к каждой задаче указано курсивом. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

5. В треугольнике ABC на продолжении медианы CM за точку C отметили точку K так, что $AM = CK$. Известно, что угол ВМС равен $60°$. Докажите, что $AC = BK$.

«Решение» Леонарда. Покажем, что треугольники ACM и BKC равны. Из равенства соответствующих элементов будет следовать, что $BK = AC$. <u>Так как медиана пересекает сторону, к которой проведена, под углом $60°$, а кроме того $AM = MB$, то треугольник BCM — равносторонний.</u> Тогда $BC = CM$, $\angle BCK = 120° = \angle AMC$, а $KC = AM$ по условию, откуда треугольники ACM и BKC равны по первому признаку.

Найдите ошибки, если таковые имеются, оцените написанное в баллах (максимальное — 7, минимальное — 0) и поясните свою оценку, а также напишите верное решение, если указанное содержит существенные неточности.

Решение. На самом деле, треугольники ACM и BKC могут быть не равны. Ошибка в приведенном «решении» подчеркнута: вывод о том, что треугольник BCM равносторонний, можно было бы сделать в случае равенства медианы половине стороны, к которой она приведена, здесь же это может быть не так, ведь ничего не запрещает сделать чертеж для произвольного треугольника, и мы бы получили, что он прямоугольный.

Теперь приведем верное решение этой задачи. Для этого продлим медиану CM на свою длину, обозначим получившуюся точку через C'. Тогда $ACBC'$ — параллелограмм, и поэтому $AC = BC'$. Значит, нам достаточно доказать, что треугольник BKC' равносторонний. Заметим, что $KC' = KC + CM + C'M = KC + 2CM$. Опустим из точки B перпендикуляр BP на медиану CM. Так как $\angle BMC = 60°$, то $MP = \frac{1}{2}CK$. А значим отрезок $KP = KC + CM - \frac{1}{2}KC = \frac{1}{2}KC + CM = \frac{1}{2}KC'$, то есть в треугольнике KBC' высота также является медианой, а значит он действительно равнобедренный.

6. В четырехугольнике $ABCD$ $\angle A = 85^\circ$, $\angle B = 115^\circ$, $AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

«Решение» Карла. Так как M лежит на серединных перпендикулярах к AB и CD, она равноудалена от A и B, а также от C и D. Значит, $MA = MB$ и $MC = MD$. Тогда треугольники AMD и MBC равны по трем сторонам. Но тогда $\angle MAD = \angle MBC$, как соответствующие элементы в равных треугольниках, и $\angle MAB = \angle MBA$, как углы при основании равнобедренного треугольника AMB. Но тогда, складывая два полученных равенства, имеем $\angle DAB = \angle ABC$, а по условию эти углы не равны. Значит, такого быть не может.

Найдите ошибки, если таковые имеются. Верное решение здесь писать **не** *нужно.*

Решение. Ошибка данного «решения» заключается в том, что в нем по сути принято, что точка M пересечения серединных перпендикуляров к сторонам AB и CD лежит внутри четырехугольника $ABCD$, или, другими словами, не рассматриваются случаи расположения точки M. Поэтому слепо складывать полученные равенства нельзя. Приведенное «решение» лишь доказывает, что точка M не может находиться внутри $ABCD$.

7. Пьер и Вильгельм играют в следующую игру. По кругу расставлено $2n$ точек ($n > 3$) на равных расстояниях друг от друга. Они по очереди соединяют точки отрезками, причем из каждой точки может выходить не более 2 отрезков. Вильгельм хочет добиться, чтобы в какой-то момент на плоскости появился прямоугольный треугольник, а Пьер хочет ему помешать. Пьер начинает, ходят по очереди. Сможет ли Вильгельм получить прямоугольный треугольник, как бы ни играл Пьер?

«Стратегия» Вильгельма, позволяющая ему получить прямоугольный треугольник. Посчитаем общее количество прямоугольных треугольников, которые можно получить. В качестве гипотенузы подойдет любой из n отрезков, соединяющих противоположные вершины, а также необходимо выбрать третью вершину треугольника, на что есть еще $2n - 2$ способа. Итого треугольников $(2n - 2)n$. При проведении очередного отрезка Пьер может запретить появление как максимум четырех прямоугольных треугольников, так как если он соединяет точки, из каждой из которых уже был проведен отрезок, то он не дает построить прямоугольные треугольники на тех отрезках, а их можно построить максимум двумя способами. Всего Пьер проведет не более n отрезков, а значит запретит не больше $4n$ прямоугольных треугольников, а всего их $(2n-2)n$, что хотя бы $6n$. Значит, хоть какой-то прямоугольный треугольник Пьер не запретит, его мы и сможем получить.

«Стратегия» Пьера, при которой он не даст Вильгельму построить прямоугольный треугольник. Первым ходом соединим любые две точки. Наша стратегия будет заключаться в том, чтобы достраивать отрезки так, чтобы после очередного нашего хода все отрезки образовывали путь. Покажем, как этого добиться. Будем проводить индукцию по количеству сделанных нами ходов. После первого нашего хода все проведенные отрезки образуют путь длины 1, значит, база есть. Переход. Если Вильгельм соединяет путь с новой точкой, то просто соединяем еще одну точку (если такая есть) с одним из концов пути. Треугольник не образовался. Если же Вильгельм проводит отрезок между двумя точками не из пути, то соединяем один из концов этого отрезка с одним из концов пути, тем самым снова треугольник появиться не мог. Если в какой-то момент мы не можем сделать ход, то и Вильгельм сходить не сможет, а по выше указанной стратегии треугольники появиться не могли.

Является ли верным первое решение? Второе? Объясните, почему Вы так считаете. Свое решение здесь писать **не** *нужно.*

Ошибка Вильгельма в том, что он считает, будто бы только Пьер «запрещает» появление прямоугольных треугольников. Между тем, проводя свои отрезки, Вильгельм также какие-то треугольники запрещает, а поэтому на самом деле все приведенные вычисления не имеют смысла.

Ошибка Пьера в том, что он рассматривает не все случаи возможного хода Вильгельма. А именно, Вильгельм своим ходом может еще и замкнуть путь, который выстроил Пьер. Тогда вся стратегия Пьера перестает работать.

8. На плоскости нарисован неравнобедренный треугольник ABC и окружность, проходящая через точки A и B, а также через центр I вписанной окружности треугольника ABC (центры окружностей при этом не отмечены). Как с помощью *одной линейки* построить точку I?

«Решение» Рене́. Проведем лучи CA и CB до вторичного пересечения с окружностью в точках A' и B' соответственно. Соединим A' и B', точку пересечения полученного отрезка с AB обозначим через P. Проведем прямую CP, и ближайшая к C точка пересечения этой прямой с окружностью, описанной вокруг $AA'BB'$ и будет точкой I.

Прав ли Рене́? Если да, то приведите доказательство построения, а если нет, то укажите, почему, и приведите верное построение с обоснованием.

Ответ. Рене́ прав, и сейчас мы докажем корректность приведенного построения. **Решение.** Воспользуемся *леммой Мансиона*, также именуемой *леммой о трезубце*: середина дуги AB (сразу обозначим ее через T) описанной окружности треугольника ABC, не содержащая точку C, равноудалена от точек A, B и центров вписанной и вневписанной окружностей (последняя касается отрезка AB) треугольника ABC. Отметим, что лемма доказывается простым счетом углов.

Легко видеть, что как раз окружность с центром в T (обозначим ее через γ) и строится в условии. Более того, точка T лежит на биссектрисе угла A, и поэтому при симметрии относительно этой биссектрисы окружность γ переходит сама в себя. Кроме того, лучи CA и CB переходят друг в друга, а значит точки пересечения лучей CA и CB с окружностью переходят в точно такие же точки на другом луче. При этом, так как $CA \neq CB$, точка A симметрична точке B', а точка B — точке A'. Итак, отрезки AB и $A'B'$ симметричны относительно биссектрисы, а значит их точка пересечения P лежит на этой биссектрисе. Тем самым, соединяя точку C и P, Рене́ строит биссектрису угла C, и, в силу приведенной выше леммы о трезубце, точка пересечения этой биссектрисы с окружность γ и будет искомой точкой I — центром вписанной окружности треугольника ABC.