Финал по алгебре

17 апреля

Уважаемые участники!

В следующем блоке задач оценивается полное решение, с обоснованием. Каждая задача оценивается из 7 баллов.

1. Из пункта A в пункт B одновременно отправились два велосипедиста. Первый велосипедист проехал весь путь со скоростью v, а второй поделил свой путь на семь равных участков и двигался с постоянной скоростью на каждом из участков. Известно, что скорость второго велосипедиста на каждом участке, кроме первого, была больше скорости на предыдущем участке на одну и ту же величину, а на четвертом участке он двигался со скоростью v. Кто приехал в пункт B раньше?

Ответ. Первый. **Решение.** По условию, скорости второго велосипедиста на семи участках образуют арифметическую прогрессию. Обозначим разность этой прогрессии через a. Тогда скорости второго велосипедиста равны $v-3a$, $v-2a$, $v-a$, v, $v+a$, $v+2a$, $v+3a$. Разобьем все, кроме v, на пары, дающие в сумме $2v$. Тем самым соответствующие участки пути тоже разбиты на пары: 1-7, 2-6, 3-5. Покажем, что на такую пару участков первый тратит меньше времени, чем второй. Обозначим все расстояние между пунктами через $7S$. Тогда в произвольной паре первый проезжает ее за $\frac{2S}{v}$, а второй — за $\frac{S}{v-x}+\frac{S}{v+x}$ для некоторого ненулевого x, $x<v$. Приводя второе выражение к общему знаменателю, получаем $\frac{2Sv}{v^2-x^2}$, в то время как первое можно переписать как $\frac{2Sv}{v^2}$. Заметим, что числители полученных дробей равны, дроби положительны, а знаменатель первой дроби больше. Значит, первая дробь меньше второй, а значит мы доказали, что первый велосипедист тратит на пару меньше времени, чем второй. Тогда на все три пары первый велосипедист потратит тем более меньше времени, а на четвертый участок — столько же. Поэтому первый приедет раньше второго.

Критерий. Только правильный ответ не оценивается. Если время выражено через расстояние и все скорости на промежутках, но дальнейших продвижений нет, то ставится 2 балла. Разбор частных случаев не оценивается.

2. Среднее арифметическое десяти различных натуральных чисел равно 15. Найдите наибольшее значение наибольшего из этих чисел.

Ответ. 105. **Решение.** Так как среднее арифметическое десяти чисел равно 15, то их сумма равна $15\cdot 10=150$. При этом сумма девяти из этих чисел никак не меньше суммы девяти наименьших натуральных чисел (так как по условию все числа различны), то есть 45. Поэтому наибольшее из этих десяти чисел не больше $150-45=105$. Указанное число достигается, примером является десятка чисел $1,2,\ldots,8,9,105$.

Критерий. Если приводится пример на 105, но не объясняется, почему в нем достигается максимум наибольшего из чисел, то решение оценивается не более чем в 5 баллов. Верный ответ в этой задаче стоит 1 балл.

3. Существует ли такая функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, что выполнено $f(\sin x)+f(\cos x)=\sin x$ при любом вещественном x?

Ответ. Нет, не существует. **Решение.** Подставим $x=0$, получим, что $f(0)+f(1)=0$. Подставим $x=\frac{\pi}{2}$, получим, что $f(1)+f(0)=1$. Эти два условия не могут выполняться одновременно, значит, функции, удовлетворяющей условию, не существует.

Критерий. Только верный ответ в данной задаче не оценивается.

4. Пусть a, b, c — натуральные числа, для которых выполнены два равенства: $ab + bc + ca + 2(a + b + c) = 8045$ и $abc - a - b - c = -2$. Найдите, чему равно $a + b + c$.

Ответ. 2012. **Решение.** Сложим два данных в условии равенства и прибавим к обеим частям 1. Получим $abc+ab+bc+ca+a+b+bc+1 = 8044$. Левая часть раскладывается как $(a+1)(b+1)(c+1)$, поэтому мы получили некое представление числе 8044 в виде произведения трех чисел. Заметим, что так как a, b, c — натуральные, то $a+1$, $b+1$, $c+1$ — натуральные числа, каждое из которых больше 1. При этом число $8044 = 2 \cdot 2 \cdot 2011$, и число 2011 — простое. Поэтому приведенное разложение числа 8044 на натуральные множители, большие 1, единственно с точностью до порядка. Значит, сумма чисел $a + 1$, $b + 1$, $c + 1$ равна $2 + 2 + 2011 = 2015$, а сумма чисел a, b, c равна 2012.

Комментарий. Также возможно решение, в котором перебором выясняется, что для выполнения условия $abc - a - b - c = -2$ должны быть равные 1 числа, мы его приводить здесь не будем.

Критерий. Если в решении из комментария перебор не полон или не производится, то решение оценивается не более чем в 4 балла. Если же при этом не приводится ответ на вопрос задачи, то не более 3 баллов. Верный ответ за эту задачу стоит 1 балл.

Для каждой из следующих задач приведено «решение». В этом «решении» необходимо найти ошибки, если таковые имеются, объяснить, почему те или иные рассуждения не верны и, возможно, написать верное решение. Конкретное задание к каждой задаче указано курсивом. Максимальный балл за каждую из задач равен 7.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin y - \sin x &= x - y; \\ \sin y - \sin z &= z - y; \\ x - y + z &= \pi \end{cases}$$

в вещественных числах.

«Решение» Франсуа. Перепишем исходную систему уравнений:

$$\begin{cases} \sin y + y &= \sin x + x; \\ \sin y + y &= \sin z + z; \\ x - y + z &= \pi. \end{cases}$$

При этом функция $f(x) = \sin x + x$ — возрастающая, так как первая производная положительна. Значит, из первых двух уравнений следует, что $x = y = z$, и, подставляя три равные переменные в третье, получаем, что $x = y = z = \pi$.

Найдите ошибки в «решении» Франсуа, если таковые имеются; оцените решение Франсуа и напишите полное при необходимости.

Решение. «Решение» Франсуа в целом верное, но содержит довольно существенную неточность: дело в том, что первая производная функции $f(x) = \sin x + x$ *неотрицательна*, поэтому сразу сделать вывод, что $f(x)$ — возрастающая, нельзя. Тем не менее, это верно, и решение исправляется добавлением следующих соображений. Дело в том, что первая производная функции $f'(x) = \cos x + 1$ обращается в ноль только в изолированных точках, а занчит отрезков, на которых функция $f(x)$ принимает одинаковые значения, нет, и функция действительно возрастающая.

Критерий. Если найдена неточность в «решении», но при этом этом она не заделывается, то ставится 4 балла. Если только фраза, что производная может принимать нулевые значения, но не делается вывод, что это может привести к промежуткам постоянства, то ставится 2 балла. Если приведено только свое верное решение, то за него ставится 2 балла.

6. В некоторой стране издревле семьи заводят детей до первого сына, при этом вероятность появления мальчика равна $\frac{1}{2}$. Какое отношение мужчин и женщин в этой стране?

«Решение» Андрея. Ответ 0. Заметим, что возможна ситуация, когда у семьи не рождается мальчик. Тогда они родят бесконечное число девочек. А значит отношение будет равно 0, так как делим на бесконечность.

Найдите ошибки в «решении» Андрея и напишите свое, если замечания к Андрею существенные.

Решение. Приведенное «решение» Андрея содержит сразу несколько грубых ошибок. Во-первых, вероятность того, что найдется семья, в которой будут рождаться только девочки, равна 0; во-вторых, даже если такая семья будет, то других детей тоже будет бесконечность и мы приходим к неопределенности типа $\frac{\infty}{\infty}$.

Приведем верное решение данной задачи. Рассмотрим всех первых детей во всех семьях. Так как вероятность появления мальчика равна $\frac{1}{2}$, то среди них отношение мальчиков к девочкам равно 1:1. Дальше рассмотрим вторых детей в семьях, с ними такая же ситуация. И так на любом шаге. Получается, что и общее отношение мужчин к женщинам в этой стране равно 1.

Критерий. Найденная ошибка в «решении» Андрея стоит 3 балла, также дополнительный балл дается за правильный ответ. Свое решение без найденной ошибки в «решении» Андрея также оценивается из 3 баллов. Если в своем решении написано, что раз вероятность рождения мальчика равна $\frac{1}{2}$, то мальчиков и девочек поровну, но при этом нет упоминания о независимости событий, то такое решение оценивается не выше 1 балла (которые могут быть прибавлены к баллам за нахождение ошибки в «решении» Андрея).

7. Пусть a, b, c — три вещественных числа таких, что выполнено

$$\frac{a(b-c)}{b(c-a)} = \frac{b(c-a)}{c(b-a)} = k > 0$$

для некоторого вещественного k. Найдите наибольшее целое число, не превосходящее k.

«Решение Огюстена». Будем показывать, что $k < 1$. Предположим противное. Тогда $\dfrac{a(b-c)}{b(c-a)} \geqslant 1$. Домножая на $b(c-a)$ обе части, имеем $a(b-c) \geqslant b(c-a)$. Аналогично

$b(c-a) \geqslant c(b-a)$. Получаем двойное неравенство $ab-ac \geqslant bc-ab \geqslant cb-ac$. Заметим, что если мы из суммы первого и второго выражений вычтем третье (*), то получим 0. Но так как отношение выражений положительно, то либо все они положительны, либо все отрицательны. Положительными они быть не могут, иначе (*) положительно. А если же все выражения отрицательны, то отношение первого и второго меньше 1. Итак, в обоих случаях мы получили противоречие. Значит, $k < 1$, но по условию оно же больше 0. Поэтому наибольшее целое число, не превосходящее k, равно 0.

Найдите ошибки, если они есть, оцените «решение» Огюстена и напишите свое, если приведенное содержит существенные недочеты.

Решение. Ошибка в «решении» Огюстена в том, что он домножает обе части неравенства на $b(c-a)$, совершенно забывая, что это выражение может быть и неположительно. Это существенная ошибка, влияющая на все решение в целом. Чтобы исправить все ошибки, мы отдельно рассмотрим два случая: $b(c-a) > 0$ и $b(c-a) < 0$ ($b(c-a) \neq 0$ по условию).

Первый случай, $b(c-a) > 0$. Мы будем доказывать, что $k < 1$, для этого предположим противное. Тогда произведение двух данных в условии дробей не меньше 1: $\frac{a(b-c)}{c(b-a)} \geqslant 1$. При этом, так как $b(c-a) > 0$, то и числитель, и знаменатель полученной дроби также положительны. Поэтому $a(b-c) \geqslant c(b-a)$, или, приводя подобные, $ab \geqslant cb$. Но $b(c-a) > 0$, или $bc > ab$. Противоречие, значит, данный случай невозможен.

Второй случай, $b(c-a) < 0$. Также доказываем, что $k < 1$, предполагая противное. Все-равно произведение двух данных в условии дробей не меньше 1: $\frac{a(b-c)}{c(b-a)} \geqslant 1$. Но теперь, так как $b(c-a)$ отрицательно, то и числитель, и знаменатель полученной дроби отрицательны, при этом $a(b-c) \leqslant c(b-a)$, или, приводя подобные, $ab \leqslant cb$. Но у нас в этом случае $b(c-a) < 0$, или $bc < ab$. Снова поличили противоречие.

Итак, оба случая рассмотрены, в обоих доказано, что $k < 1$. Значит, наибольшее целое число, не превосходящее k, равно 0.

Критерий. Если найдена ошибка в «решении», но свое решение не приведено или неверно, то ставится 3 балла. Если же приведено только свое решение, а в «решении» Огюстена ошибки не найдены, то оно оценивается из 3 баллов.

8. Найдите все натуральные $n > 2$, для которых многочлен $P(x) = x^n + x^2 + 1$ делится нацело на многочлен $Q(x) = x^2 + x + 1$.

«Решение» Жозефа. Запишем $P(x) - Q(x) = x^n - x$. Так как многочлены x и $Q(x)$ взаимно просты, то $H(x) = x^{n-1} - 1$ должен делиться на $Q(x)$. Заметим, что $Q(x)$ и $x-1$ также взаимно просты, и при этом $H(x)$ делится на $x-1$, значит, многочлен $H(x)$ должен делиться на их произведение, поэтому вопрос задачи равносилен следующему: при каких n многочлен $x^{n-1}-1$ делится на многочлен x^3-1. Если $n-1$ делится на 3, то по формуле сокращенного умножения получаем, что $x^{n-1} - 1$ на $x^3 - 1$ делится, а если $n - 1$ на 3 не делится, то и многочлен $x^{n-1} - 1$ на $x^3 - 1$ не делится. Итак, подходят все n, дающие остаток 1 при делении на 3.

Найдите ошибки, если таковые имеются, оцените написанное «решение» и приведите свое, если изложенное выше не точно.

Решение. «Решение» Жозефа почти верное, в нем лишь не объяснено, почему если $n-1$ на 3 не делится, то и многочлен $x^{n-1}-1$ на x^3-1 не делится. Это достаточно просто заделывается: применим алгоритм Евклида для нахождения НОД многочленов $x^{n-1}-1$ и x^3-1. На первом шаге вычтем из первого многочлена второй и вынесем x^3 за скобки (при $n>2$): $x^3(x^{n-4}-1)$. Так как x^3 и x^3-1 взаимно просты, то про x^3 можно забыть и оставить только $x^{n-4}-1$. Тем самым мы через какое-то время получим многочлен типа x^k-1, где k от 1 до 3. Если $k=3$, то он разделится на x^3-1, а если нет, то не разделится. При этом k будет равно 3 тогда и только тогда, когда n дает остаток 1 при делении на 3. Значит, ровно такие n и подойдут под условие задачи.

Критерий. Верно найденная помарка в «решении» Жозефа оценивается в 4 балла. Если приведено свое верное решение, но ошибка в «решении» Жозефа не найдена, то ставится 2 балла.