Летняя школа «Спектр»
2013 год

Вступительное задание

Уважаемые старшеклассники!

В этом году, чтобы попасть к нам в школу, вы должны написать вступительную работу. Решения можно отправлять почтой по адресу 420126, г. Казань, а/я 303 или в электронном виде (отсканированными или сфотографированными в хорошем качестве) на почтовый ящик `spektr.kazan@gmail.com`.

Не огорчайтесь, если вы не сможете решить все задачи. Однако, в решенных задачах необходимо привести не только ответы, но и подробные объяснения. Даже правильный ответ без объяснения, как он был получен, оценивается намного ниже!

При отправлении работы электронной почтой категорически необходимо придерживаться следующих правил оформления. Работы, написанные на бумаге, сканируются или фотографируются (сканирование предпочтительнее). Работы, набранные на компьютере, сохраняются в виде «Документ Word 2003». Полученные файлы высылаются в виде приложений к электронным письмам по адресу `spektr.kazan@gmail.com`. На титульном листе каждой работы указываются ФИО автора, адрес (город, улица, дом, квартира), школа, класс, телефон для связи. Допускаются только файлы форматов `.doc`, `.jpg` и `.pdf`. Нельзя сканировать работы с поворотом текста на 90 или 180 градусов. Одна работа может пересылаться в виде одного или нескольких файлов. Объём каждого пересылаемого файла не должен превышать 2 Мб. Каждое письмо должно содержать работу ровно одного участника: пересылка работ одного участника несколькими письмами и работ нескольких участников одним письмом не допускается. Крайний срок отправки работы электронным письмом — 31 мая, при отправке обычным письмом через почту России — 24 мая (по штемпелю на конверте).

Поле «Тема» каждого письма оформляется в формате «Спектр–2013, класс, ФИО, город» (например, «Спектр–2013, 9 класс, Иванов Петр Сергеевич, Казань»). *Ничего другого в поле «Тема» быть не должно!* При неудачной отправке работы необходимо заново выслать всю работу целиком. Для каждого учащегося будет проверяться только последнее поступившее письмо. В скобках после каждой задачи указано, для какого класса (классов) она предназначена. Решать задачи для более старшего класса не запрещается.

Без вступительной работы в школу «Спектр» зачисляются победители и призеры региональных и финальных этапов Всероссийской олимпиады по математике в 2013 году, победители и призеры (награжденные дипломами I, II и III степени) личных олимпиад XL и XLI Уральских турниров юных математиков и XVI Кубка памяти А.Н. Колмогорова. Если вы являетесь призером какой-либо другой олимпиады, вы можете написать на указанный выше адрес и уточнить, будете ли вы зачислены без вступительной работы.

Желаем удачи!

1. (8) Известно, что некоторый прямоугольник, стороны которого выражаются целыми числами, можно разрезать на уголки вида  (сторона клетки на рисунке равна 1). Докажите, что его можно разрезать на прямоугольники 1×3.

2. (8) Найдите все натуральные числа, большие 10, обладающие следующим свойством: если у квадрата этого числа поменять местами 2 последние цифры, то получится квадрат следующего за ним числа.

3. (8–10) Числа a, b, c, d таковы, что $a^2 + b^2 + (a+b)^2 = c^2 + d^2 + (c+d)^2$. Докажите, что $a^4 + b^4 + (a+b)^4 = c^4 + d^4 + (c+d)^4$.

4. (8–9) Урфин Джюс выстроил 66 дуболомов в шеренгу, пересчитал их и понял, что перестроить их в колонну по пять ему не удастся. Тогда, он решил между любыми двумя дуболомами, стоящими в шеренге, поставить еще по одному дуболому. Сможет ли он, повторив эту операцию несколько раз, добиться того, чтобы количество дуболомов стало кратным пяти?

5. (8–9) Назовем натуральное число *замечательным*, если оно самое маленькое среди натуральных чисел с такой же, как у него, суммой цифр. Чему равна сумма всех трехзначных замечательных чисел?

6. (8–9) Докажите, что если $x \geqslant 2$ и $y \geqslant 2$, то $x\sqrt{y-2} + y\sqrt{x-2} \leqslant \dfrac{xy}{\sqrt{2}}$.

7. (8–9) Найдите какие-нибудь 7 различных натуральных чисел, сумма обратных величин которых была бы равна 1.

8. (10) Найдите какие-нибудь 9 различных натуральных чисел, сумма обратных величин которых была бы равна 1.

9. (8–9) В треугольнике ABC точка M — середина AC, MD и ME — биссектрисы треугольников ABM и CBM соответственно. Отрезки BM и DE пересекаются в точке F. Найдите MF, если $DE = d$.

10. (9–10) Три различных точки A, B, C лежат на окружности ω. Касательные к этой окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке P. Касательная к ω в точке C пересекает прямую AB в точке Q. Докажите, что $PQ^2 = PB^2 + QC^2$.

11. (9) Существует ли квадратный трехчлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, а его значения при всех остальных натуральных x — иррациональны?

12. (9–10) Есть 12 внешне одинаковых монет двух сортов, по 6 штук каждого сорта. За одно взвешивание про любую группу можно узнать, сколько в ней монет первого сорта. Требуется за два взвешивания найти пару монет разного сорта (какая именно монета первого сорта, а какая — второго, выяснять не надо).

13. (10) Пусть $\cos x \neq 0$. Докажите неравенство

$$\left|\frac{\cos 2x + 3}{\cos x}\right| \geqslant 4.$$

14. (10) Существует ли многочлен $P(x)$ такой, что $P(1) = 1$, $P(2) = 2$, $P(3) = 3$, $P(4) = 4$, а его значения при всех остальных натуральных x — иррациональны?

15. (10) Решите систему уравнений

$$x \cdot |x| + y \cdot |y| = 1, \qquad [x] + [y] = 1.$$

(Здесь $[a]$ обозначает целую часть числа a, то есть, наибольшее целое число, не превосходящее a).

16. (10) При каких натуральных x значение многочлена $x^3 + 7x^2 + 6x + 1$ будет кубом натурального числа?

17. (10) В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен $30°$. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.